Esame di Stato 2024 suppletiva – Matematica

Problema 1

a)

La funzione ha un unico zero, con molteplicità 2, nel punto di coordinate (4, 0).

L'insieme immagine è $I = \left]-\infty, -16\right] \cup \left[0, +\infty\right[$

La funzione presenta un massimo relativo in (-4, -16) e un minimo relativo in (4, 0).

Per quanto concerne i limiti agli estremi del dominio, sempre dal grafico osserviamo che:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to 0^{\mp}} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

Gli altri due limiti richiesti determinano le condizioni per l'esistenza dell'asintoto obliquo che, sempre dalla figura, è la retta di equazione

$y = x - 8$, pertanto:

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ (pendenza dell'asintoto)

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \left[f(x) - x\right] = -8$ (ordinata all'origine dell'asintoto).

La funzione presenta inoltre l'asintoto verticale $x = 0$ (asse *y*)

b)

$$f(x) = \frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

Osserviamo che *f*(x) presenta una discontinuità eliminabile per *x* = 2, con limite $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2 \neq 0$, pertanto

$c = d = 2$;

presenta inoltre uno zero doppio in (4,0), da cui segue immeditamente:

$b = 4$

Consideriamo il limite $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$ che, con i parametri già fissati, diviene:

$$\lim_{x \to 2} \frac{a(x-4)^2(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{a(x-4)^2}{x} = 2a$$

da cui:

$2a=2 \quad \Rightarrow \quad a=1$

La funzione ha pertanto la forma:

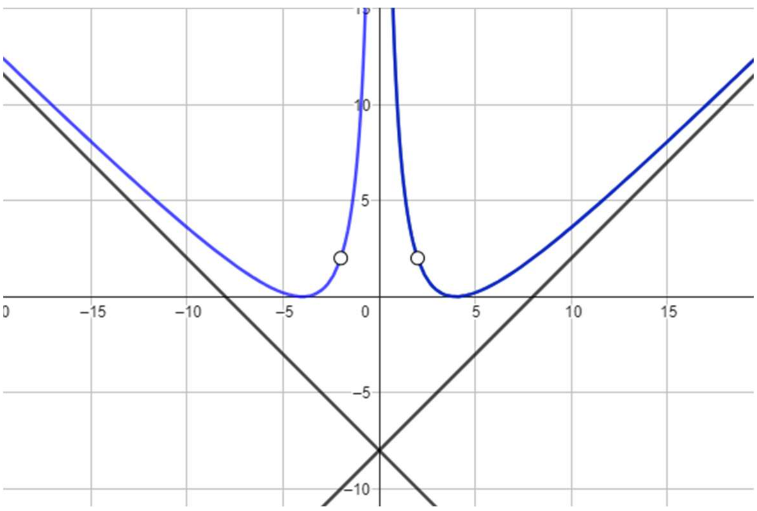
$$f(x)=\frac{(x-4)^2(x-2)}{x(x-2)}$$

che si riduce a:

$$f(x)=\frac{(x-4)^2}{x} \quad \text{con } x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$$

c)

Il grafico della funzione $g(x)=f(|x|)$ (in blu nella figura) si ottiene dal grafico γ simmetrizzando rispetto all'asse *y* il solo ramo situato nel semipiano *x* > 0:



$g(x)=f(|x|)$ è definita in $D'=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-2,0\right[\cup\left]0,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

ha immagine $I'=\left[0,+\infty\right[$

presenta due punti di minimo assoluto in (-4,0) e (4,0) e ha asintoti:

$x=0$ (asse *y*),

$y=x-8$ (asintoto obliquo destro), e il suo simmetrico

$y=-x-8$ (asintoto obliquo sinistro).

La funzione $g(x)=\ln(f(x))$ è definita nei punti in cui $f(x)>0$, ovvero nell'insieme:

$D''=\left]0,2\right[\cup\left]2,4\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

In base all'andamento grafico di $f(x)$ possiamo calcolare immediatamente i limiti di $h(x)$ agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{f(x)\to +\infty} \ln(f(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{f(x)\to 2} \ln(f(x)) = \ln 2$$

$$\lim_{x\to 4} h(x) = \lim_{f(x)\to 0^+} \ln(f(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{f(x)\to +\infty} \ln(f(x)) = +\infty$$

La funzione $h(x)$ ha pertanto immagine l'insieme $I'' = \left]-\infty, +\infty\right[$ e non presenta punti di estremo relativo.

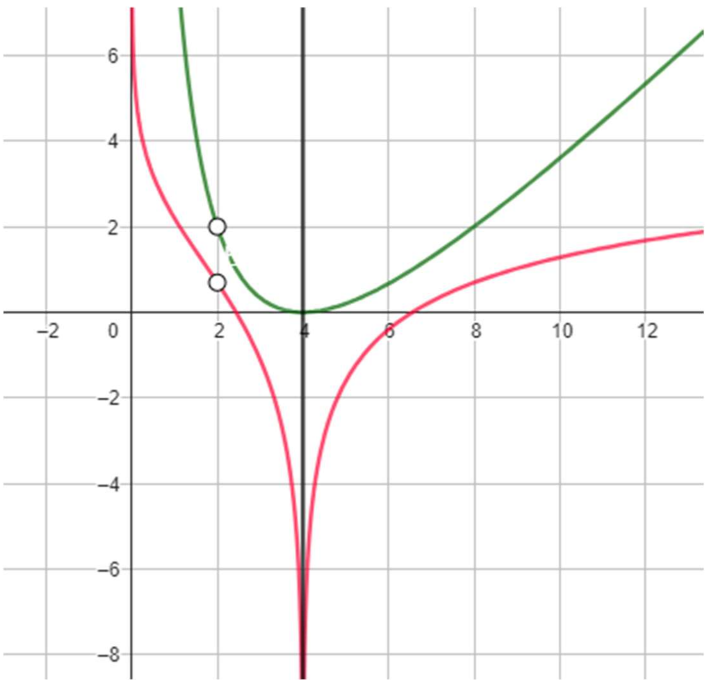
$h(x)$ ha asintoti verticali le rette $x = 0$ (asse *y*) e $x = 4$.

No ha asintoto obliquo, in quanto la funzione $f(x)$ è un infinito del primo ordine (ovvero diverge come *x*), in quanto

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, da cui segue, per sostituzione di infiniti equivalenti:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

La figura riporta il grafico del ramo di $f(x)$ situato nel primo quadrante (in verde) e della funzione $h(x)$ (in rosso).



d)

Poiché nell'intervallo $[3,8]$ $f(x) \geq 0$ (si annulla solo nel punto di ascissa *x* = 4), la funzione $F(x)$ è strettamente crescente. Si ha poi:

$F(3)=0$

$F'(x)=f(x)=\frac{(x-4)^2}{x}$ ristretta all'intervallo $[3,8]$.

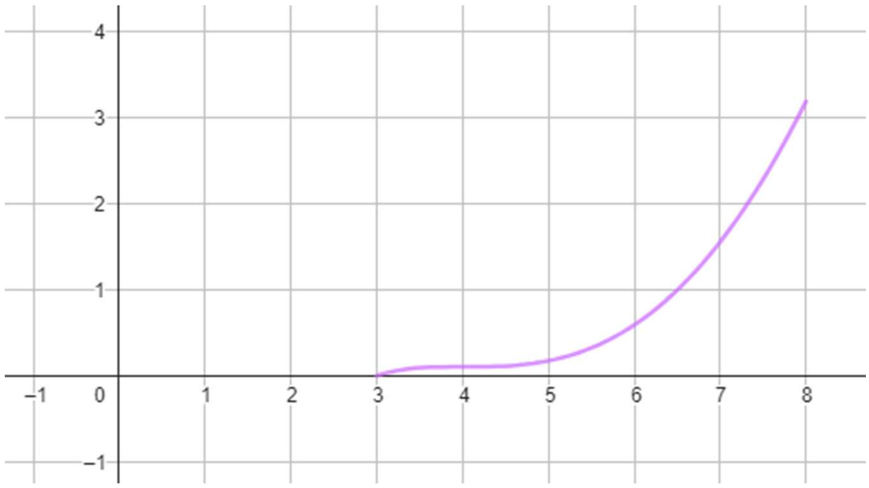
Poiché $F'(4)=0$ e $F'(x)>0$ per $x\neq 4$, possiamo concludere immediatamente che il punto di ascissa 4 è punto di flesso orizzontale per la funzione $F(x)$ (quindi ha coefficiente angolare *m* = 0).

Per calcolare l'estremo destro di $F(x)$ calcoliamo l'integrale:

$$F(x)=\int_3^x f(t)\,dt=\int_3^x \frac{(t-4)^2}{t}\,dt=\int_3^x \left(t-8+\frac{16}{t}\right)dt=\left|\frac{t^2}{2}-8t+16\ln(t)\right|_3^x=\frac{x^2}{2}-8x+16\ln(x)+\frac{39}{2}-16\ln 3$$

da cui $F(8)=-\frac{25}{2}+16\ln\frac{8}{3}\approx 3{,}19$

Il grafico è riportato nella figura seguente



Problema 2

a)

$$f_a(x)=\frac{x^2-1}{e^{ax}}$$

funzione reale trascendente, definita e continua per $x\in\mathbb{R}$.

Al variare del parametro *a* le curve hanno in comune i punti in cui $f_a(x)=0$, ovvero i punti

(-1,0) e (1,0) e il punto di ascissa *x* = 0, che permette di eliminare il parametro *a*, ovvero il punto (0, -1)

b)

$$f_a'(x)=\frac{2xe^{ax}-ae^{ax}\left(x^2-1\right)}{e^{2ax}}=\frac{-ax^2+2x+a}{e^{ax}}$$

Studiamo il segno di $f_a'(x)$

Il denominatore è strettamente positivo, per cui il segno di $f_a'(x)$ è determinato dal segno del solo numeratore, che si annulla per $-ax^2+2x+a=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1\mp\sqrt{1+a^2}}{a}$

Consideriamo i possibili segni di *a*:

se $a<0$ $f_a'(x)>0$ per $x<\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}\cup x>\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$

i punti di ascissa $x=\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}$ e $x=\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$ sono rispettivamente di massimo e minimo relativo.

se $a>0$ $f_a'(x)>0$ per $\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}$

I punti di ascissa $x=\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$ e $x=\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}$ sono rispettivamente di minimo e massimo relativo.

Deriviamo ulteriormente $f_a(x)$ per studiarne la concavità:

$$f''(x)=\frac{\left(-2ax+2\right)e^{ax}-ae^{ax}\left(-ax^2+2x+ax^2\right)}{e^{2ax}}=\frac{a^2x^2-4ax+2-a^2}{e^{ax}}$$

Poniamo

$$f''(x)=\frac{a^2x^2-4ax+2-a^2}{e^{ax}}>0$$

Il denominatore è sempre positivo, il numeratore si annulla per

$$x = \frac{2 \mp \sqrt{a^2+2}}{a}$$

che costituiscono le ascisse dei punti di flesso di $f_a(x)$.

c)

Imponiamo che $f_a(x)$ abbia un flesso nel punto (0,-1):

$$\frac{2 \mp \sqrt{a^2+2}}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2+2} = -2 \vee \sqrt{a^2+2} = 2$$

La prima equazione non ammette soluzioni in quanto il primo membro è strettamente positivo.

Dalla seconda otteniamo:

$$a^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \mp\sqrt{2}$$

In corrispondenza di tali valori, la derivata prima assume la forma:

poiché $f_a'(0) = a$ le rette tangenti, nei due casi, hanno equazione:

per $a = -\sqrt{2}$: $y = -\sqrt{2}x - 1$

per $a = \sqrt{2}$: $y = \sqrt{2}x - 1$

d

Consideriamo le due funzioni $f_a(x) = \dfrac{x^2-1}{e^{ax}}$ e $f_{-a}(x) = \dfrac{x^2-1}{e^{-ax}}$.

Determiniamo la funzione il cui grafico è il simmetrico del grafico di $f_a(x)$ rispetto all'asse *x*:

$$f_a(-x) = \frac{x^2-1}{e^{-ax}} = f_{-a}(x)$$

Le due curve sono pertanto simmetriche rispetto all'asse *y*.

Utilizzando le informazioni già ottenute nei punti precedenti, studiamo la funzione $f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$.

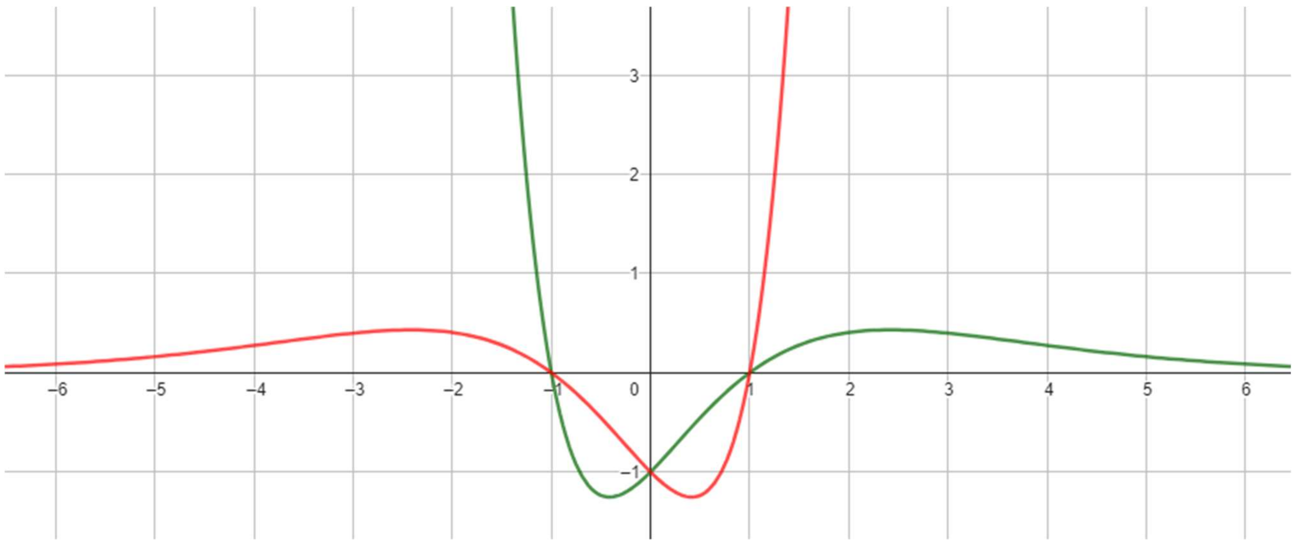
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{e^x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{e^x} = 0^+$$ (per la gerarchia di infiniti)

La funzione presenta minimo relativo per $x = 1-\sqrt{2}$, massimo relativo per $x = 1+\sqrt{2}$.

La derivata seconda si annulla per $x = 2 \mp \sqrt{3}$,quindi la funzione presenta la concavità rivolta verso l'alto per $x < 2-\sqrt{3} \cup x > 2+\sqrt{3}$

La figura riporta in verde il grafico di $f_1(x)$, in rosso quello di $f_{-1}(x)$, simmetrico rispetto ad esso.



L'area della regione finita di piano limitata dai due grafici è espressa dall'integrale:

$$S = 2\int_0^1 \left[f_1(x) - f_{-1}(x)\right] dx = 2\int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{e^x} - \frac{x^2-1}{e^{-x}}\right) dx = 2\int_0^1 \left[x^2\left(e^{-x}-e^x\right) + \left(e^x - e^{-x}\right)\right] dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right)\left(1-x^2\right) dx$$

Calcoliamo preliminarmente la primitiva di $\int \left(e^x - e^{-x}\right)\left(1-x^2\right) dx$; integriamo tre volte per parti (ogni integrazione è in una riga diversa), ottenendo:

$$\int \left(e^x - e^{-x}\right)\left(1-x^2\right) dx = \left(e^x + e^{-x}\right)\left(1-x^2\right) + 2\int x\left(e^x + e^{-x}\right) dx =$$

$$= \left(e^x + e^{-x}\right)\left(1-x^2\right) + 2x\left(e^x - e^{-x}\right) - 2\int \left(e^x - e^{-x}\right) dx =$$

$$= \left(e^x + e^{-x}\right)\left(1-x^2\right) + 2x\left(e^x - e^{-x}\right) - 2\left(e^x + e^{-x}\right) + c$$

che possiamo scrivere in forma più compatta:

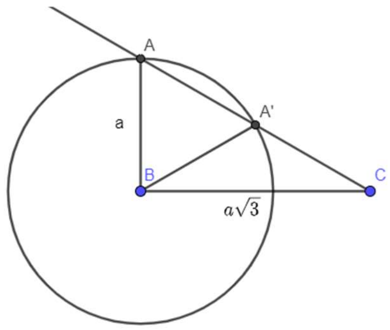
$$= e^x\left(-x^2 + 2x - 1\right) + e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 1\right) + c$$

L'area richiesta è pertanto:

$$S = 2\left|e^x\left(-x^2 + 2x - 1\right) + e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 1\right)\right|_0^1 = 4 - 8e^{-1}$$

QUESITI

1



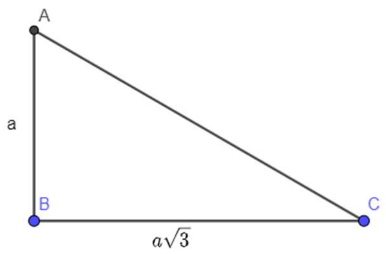
Consideriamo il segmento *BC* di lunghezza $a\sqrt{3}$ e la circonferenza di centro *B* e raggio *a*. Se $A\widehat{C}B = \frac{\pi}{6}$, esistono due possibili triangoli con i lati assegnati, ABC e A'B, di cui solo il primo è rettangolo:

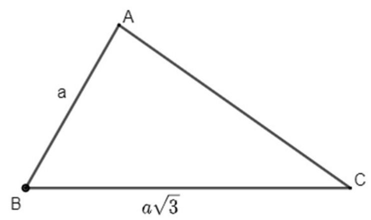
la prima affermazione è quindi falsa.

Nella seconda affermazione non si precisa quale sia l'angolo retto, pertanto si hanno due possibilità:

- l'angolo *B* è retto: in questo caso $A\widehat{C}B = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

- l'angolo *A* è retto: in questo caso $A\widehat{C}B = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 35{,}3°$;





ne segue che anche la seconda affermazione è falsa.

2

La somma di 10 euro si può ottenere solo con 2 monete da 1 euro e 4 monete da 2 euro; il numero totale di estrazioni è dato dal numero di combinazioni di 15 elementi a gruppi di 6: $C_{15,6} = \binom{15}{6}$; il numero di casi favorevoli dal prodotto $C_{9,2} \cdot C_{6,4} = \binom{9}{2}\binom{6}{4}$, pertanto la probabilità richiesta è:

$$P(10\text{ euro}) = \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{4}}{\binom{15}{6}} = \frac{108}{1001} \approx 0{,}108$$

La somma supera 10 euro solo se vengono estratte 5 o 6 monete da 2 euro; utilizziamo il teorema della probabilità complementare:

$$P(\text{somma} \leq 10\text{ euro}) = 1 - \frac{\binom{9}{1}\binom{6}{5} + \binom{6}{6}}{\binom{15}{6}} = \frac{90}{91} \approx 0{,}989$$

3

Scriviamo l'equazione del piano nella forma vettoriale:

$$\overrightarrow{OP} = t\,\overrightarrow{OA} + u\,\overrightarrow{OB} = t(1,4,8) + u(-6,0,12)$$

verifichiamo che, per una opportuna scelta dei parametri *t* e *u*, il punto *C* appartiene al piano.

Ciò comporta:

$$\begin{cases} t - 6u = -7 \\ 4t = -4 \\ 8t + 12u = 4 \end{cases}$$

che ammette soluzione *t* = -1, *u* = 1; i quattro punti sono pertanto complanari.

Calcoliamo la lunghezza dei lati del quadrilatero.

$$\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$$

$$\overline{OC} = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 4^2} = 9$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-6-1)^2 + (0-4)^2 + (12-8)^2} = 9$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-7+6)^2 + (-4-0)^2 + (4-12)^2} = 9$$

I lati sono uguali per cui si tratta di un rombo (o, caso particolare, di un quadrato).

Calcoliamo la misura delle due diagonali:

$$\overline{OB} = \sqrt{(-6)^2 + (0)^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-7-1)^2 + (-4-4)^2 + (4-8)^2} = 12$$

Le diagonali sono diverse, pertanto il quadrilatero è un rombo, di perimetro $2p = 9 \cdot 4 = 36$ e area $A = \dfrac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 36\sqrt{5}$

4

$$\frac{ax-7}{x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{7}{a}$$

$f(x)$ è continua e derivabile nel suo insieme di esistenza.

Imponiamo che $f(1) = f(7)$:

$$\ln(a-7) = \ln\left(\frac{7a-7}{49}\right) \quad \Rightarrow \quad a - 7 = \frac{a-1}{7}$$

risolta da $a = 8$.

La funzione è pertanto:

$f(x)=\ln\left(\frac{8x-7}{x^2}\right)$ definita per $x>\frac{7}{8}$

la cui derivata prima è

$$f'(x)=\ln\left(\frac{8x-7}{x^2}\right)=\frac{x^2}{8x-7}\cdot\frac{8x^2-2x(8x-7)}{x^4}=\frac{2(7-4x)}{x(8x-7)}$$

che si annulla per $x=\frac{7}{4}$; poiché $1<\frac{7}{4}<7$ e $\frac{7}{4}>\frac{7}{8}$

$x=\frac{7}{4}$ è il punto la cui esistenza è prevista dal teorema di Rolle.

5

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x^2+5x-1}=2 \quad\Rightarrow\quad a=4$$

Calcoliamo $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(8x+b)(2x^2+5x-1)-(4x+5)(4x^2+bx+3)}{(2x^2+5x-1)^2}$$

Senza sviluppare ulteriormente il calcolo, imponiamo che $f'(1)=0$:

$$6(8+b)-9(7+b)=0 \quad\Rightarrow\quad b=-5$$

La funzione è pertanto:

$$f(x)=\frac{4x^2-5x+3}{2x^2+5x-1}$$

La funzione è definita per $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-5\mp\sqrt{33}}{4}\right\}$; il numeratore della frazione non si annulla mai, pertanto la funzione presenta due asintoti verticali di equazioni; $x=\frac{-5\mp\sqrt{33}}{4}$.

6

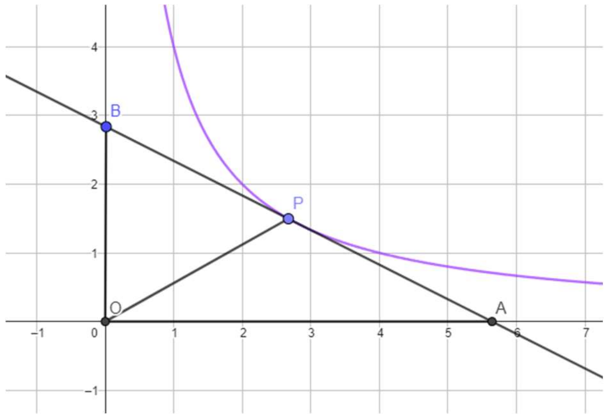
Sia $P\left(a,\frac{1}{a}\right)$

Esprimiamo l'equazione dell'iperbole nella forma $y=\frac{1}{x}$

con derivata prima $y'=-\frac{1}{x^2}$

La retta tangente in *P* ha equazione

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$$



I punti di intersezione con gli assi hanno coordinate:

$$A(2a,0),\ B\left(0,\frac{2}{a}\right)$$

I due triangoli hanno superficie:

$$S_{AOP}=\frac{1}{2}x_A y_P=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$$

$$S_{BOP}=\frac{1}{2}x_P y_B=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{2}{a}\right)=1$$

I due triangoli sono equivalenti e la loro area non dipende dal parametro *a*.

7

$$P(t)=RI_0^2\frac{a^2}{t^2}$$

$$\overline{P}=\frac{1}{a}\int_{2a}^{3a}RI_0^2\frac{a^2}{t^2}\,dt=aRI_0^2\left|-\frac{1}{t}\right|_{2a}^{3a}=aRI_0^2\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a}\right)=\frac{1}{6}RI_0^2$$

8

I coefficienti che compaiono nella *n*-esima riga (la prima riga corrisponde a *n* =0) del triangolo di Tartaglia (o di Pascal), mostrato nella prima figura riporta i coefficienti dello sviluppo del binomio $(a+b)^n$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & \dots & & \dots & & \dots & \\
\dots & & \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} & & \dots \\
\dots & \dots & & \binom{n+1}{k+1} & & \dots & \dots
\end{array}$$

la seconda figura riporta la regola costruttiva per passare da una riga alla successiva

$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$; infatti:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

I coefficienti binomiali consentono di calcolare il numero di combinazioni di *n* oggetti, presi a gruppi di *k*; riprendendo l'esempio del testo, la probabilità di realizzare *m* volte croce in *n* partite, è dato dalla probabilità di ottenere una qualsiasi sequenza di *m* croci e (*n*-*m*) teste

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} = \frac{1}{2^n}$$

per il numero di sequenze possibili, ottenute disponendo le *m* teste in una sequenza di *n* posizioni: ciò equivale al numero di modi in cui è possibile estrarre *m* oggetti da un campione di *n* elementi, ovvero al numero di combinazioni $C_{n,m} = \binom{n}{m}$.

La probabilità richiesta è infine:

$$P_{m,n-m} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{m}$$