Sessione suppletiva 2024
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

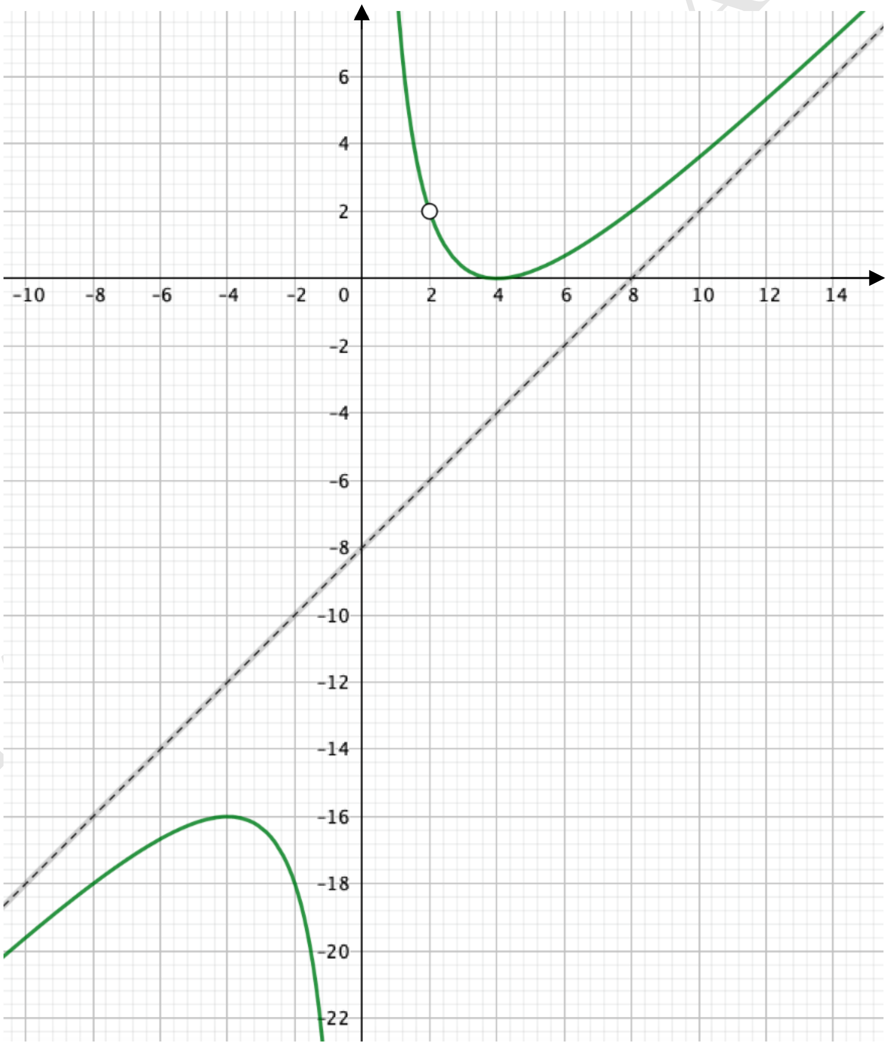
Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri il grafico γ in figura, rappresentativo di una funzione $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, dove $A(x)$ e $B(x)$ sono dei polinomi, definita nel dominio $D = (-\infty;\ 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.



Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

a) Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f. Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)$. Scrivere le equazioni degli asintoti di f.

b) Supponendo che la funzione f abbia equazione

$$y=\frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri a, b, c, d.

c) Dal grafico γ, dedurre i grafici delle funzioni $f(|x|)$ e $\ln(f(x))$ specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.

d) Si consideri la funzione $F(x)=\int_3^x f(t)dt$, definita nell'intervallo $[3;8]$. Tracciare un suo grafico rappresentativo Γ, specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto.

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di curve $f_a(x)=\frac{x^2-1}{e^{ax}}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con Γ_a il grafico di f_a.

a) Verificare che tutti i grafici Γ_a hanno tre punti in comune e scrivere le loro coordinate.

b) Al variare del parametro a, individuare gli intervalli di monotonia di Γ_a, le ascisse degli estremi relativi e dei flessi.

c) Determinare i valori del parametro a in modo che il punto F, intersezione di Γ_a con l'asse delle ordinate, sia un punto di flesso. In corrispondenza di tali valori, scrivere le equazioni delle rette tangenti in F.

d) Dimostrare che, per ogni valore di $a\neq 0$, le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1}.

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

QUESITI

1. È dato un triangolo ABC di lati $AB = a$ e $BC = \sqrt{3}a$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- Se $A\hat{C}B = \frac{\pi}{6}$, allora il triangolo è rettangolo;
- Se il triangolo è rettangolo, allora $A\hat{C}B = \frac{\pi}{6}$.

Motivare le risposte.

2. In un salvadanaio ci sono 15 monete, di cui 9 sono da 1 euro e le altre 6 da 2 euro. Se ne estraggono 6 contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia esattamente 10 euro?
- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia al massimo 10 euro?

3. Verificare che i punti $O(0,0,0)$, $A(1,4,8)$, $B(-6,0,12)$ e $C(-7,-4,4)$ sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero $OABC$ e classificarlo.

4. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right)$, con a parametro reale positivo. Successivamente, individuare il valore di a in corrispondenza del quale risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[1; 7]$ e le coordinate del punto che ne verifica la tesi.

5. Determinare i valori dei parametri reali a e b della funzione $f(x) = \frac{ax^2+bx+3}{2x^2+5x-1}$ in modo che essa abbia la retta $y = 2$ come asintoto orizzontale e un punto stazionario per $x = 1$. In corrispondenza dei valori trovati, stabilire se $f(x)$ presenta ulteriori asintoti.

6. In un sistema di assi cartesiani Oxy, si consideri l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo. Sia t la retta tangente all'iperbole in un suo punto P. Detti A e B i punti in cui t interseca gli assi del riferimento, dimostrare che i triangoli APO e BPO sono equivalenti e che la loro area non dipende dalla scelta di P.

7. Un resistore di resistenza R è percorso da una corrente variabile nel tempo di intensità $I(t) = I_0 \frac{a}{t}$, con $t > 0$ e le costanti positive I_0 e a espresse, rispettivamente, in ampère e in secondi. Sapendo che la potenza dissipata nel resistore per effetto Joule è $P(t) = RI^2(t)$, determinarne il valor medio nell'intervallo $[2a; 3a]$.

8. Scrive Leonardo Sinisgalli, in un brano tratto da *Furor Mathematicus*: «Avevo in mente un capitolo sulle leggi del caso: volevo trovare le parentele tra il triangolo di Tartaglia, relativo ai coefficienti del polinomio $(a+b)^n$ e il triangolo aritmetico di Pascal, che ci dà la probabilità di fare m volte croce in n partite giuocate a testa e croce».

Descrivere il legame esistente tra i coefficienti binomiali ed il calcolo delle probabilità.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.