Esame di Stato 2024 – Sessione straordinaria– Matematica
Problema 1
a)
Calcoliamo la derivata prima:
$$y' = 3x^2 + 2ax = x(3x+2a)$$
che si annulla per $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{2a}{3}$, ascisse dei punti di estremo relativo della funzione.
La derivata seconda
$$y'' = 6x + 2a$$
si annulla per $x_F = -\frac{a}{3}$, ascissa del punto di flesso.
Il flesso ha coordinate $F = \left(-\frac{a}{3}, -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + c\right) = \left(-\frac{a}{3}, \frac{2a^3}{27} + c\right)$
Dimostriamo che *F* è centro di simmetria della funzione.
È sufficiente dimostrare che traslando la funzione in modo che il flesso si porti nell'origine del sistema di riferimento, la funzione ottenuta è dispari.
Applichiamo quindi la traslazione di vettore $\vec{v} = \left(\frac{a}{3}, -\frac{2a^3}{27} - c\right)$, le cui equazioni sono:
$$\begin{cases} x' = x + \frac{a}{3} \\ y' = y - \frac{2a^3}{27} - c \end{cases}$$
Invertiamo le equazioni per poterle applicare alla funzione assegnata
$$\begin{cases} x = x' - \frac{a}{3} \\ y = y' + \frac{2a^3}{27} + c \end{cases}$$
che si trasforma nella funzione:
$$y = x^3 + ax^2 + c \quad \to \quad y' + \frac{2a^3}{27} + c = \left(x' - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x' - \frac{a}{3}\right)^2 + c$$
Sviluppiamo le potenze e riordiniamo i termini:
$$y' + \frac{2a^3}{27} + c = x'^3 - ax'^2 + \frac{a^2x'}{3} - \frac{a^3}{27} + ax'^2 - \frac{2a^2x'}{3} + \frac{a^3}{9} + c$$
$$y' = x'^3 - \frac{a^2x'}{3}$$
La funzione è dispari quindi ammette l'origine (punto di flesso), come centro di simmetria.
L'esistenza del centro si simmetria implica che i due punti di massimo e minimo relativo siano simmetrici rispetto ad esso, quindi il punto medio del segmento che li congiunge coincide con il centro di simmetria, ovvero con l'unico flesso della funzione.

b)

L'unico estremo relativo non nullo è $x_2 = -\frac{2a}{3}$; imponiamo che

$x_2 = -\frac{2a}{3} = -2 \quad \Rightarrow \quad a = 3$ e verifichiamo che si tratta di un massimo relativo:

Con *a* = 3 *y'* si annulla in $x_1 = 0 \vee x_2 = -2$, quindi è positiva per $x < -2 \vee x > 0$, intervalli in cui la funzione *y* è crescente; ne segue che *x* = -2 è l'ascissa del punto di massimo.

Imponiamo quindi che $y_F = \frac{2a^3}{27} + c = 6$, con *a* =3-

$$\frac{2a^3}{27} + c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 6 - \frac{2 \cdot 3^3}{27} = 4$$

c)

Consideriamo la funzione

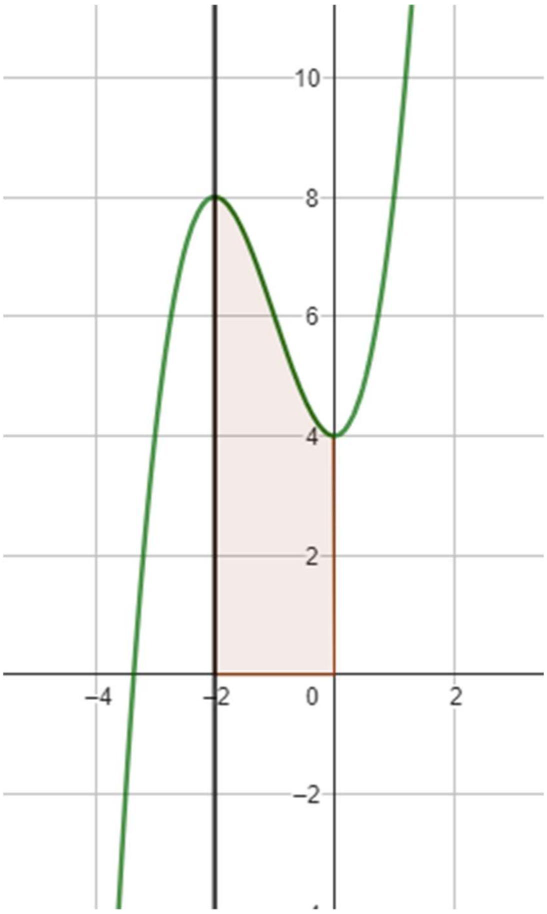
$y = x^3 + 3x^2 + 4$

Funzione razionale intera di grado 3, definita per $x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to \mp\infty} \left(x^3 + 3x^2 + 4 \right) = \mp\infty$

Abbiamo già studiato le derivate prima e seconda, per cui possiamo affermare che la funzione ha massimo relativo in $(-2, 8)$, minimo relativo in $(0, 4)$, flesso in $(-1, 6)$.

Il grafico è riportato nella figura a fianco.



$$S = \int_{-2}^{0} \left(x^3 + 3x^2 + 4 \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + 4x \right]_{-2}^{0} = 0 - (4 - 8 - 8) = 12$$

d)

Già dimostrato al punto a).

Problema 2

a)

$f(x)=e^{-x^2}$

Funzione trascendente, definita per $x\in\mathbb{R}$ ed ivi continua e derivabile

$f(x)=f(-x)$ per cui la funzione è pari (simmetrica rispetto all'asse *y*.

$f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=0^+$; l'asse *x* è asintoto orizzontale della funzione.

Calcoliamo le derivate della funzione:

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)$ è dispari, in quanto derivata di una funzione pari.

quindi $f(x)=e^{-x^2}$ è crescente per *x* < 0, decrescente per *x* > 0 e ammette massimo, relativo e assoluto in $(0,1)$.

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(-2xe^{-x^2}\right)=0^{\pm}$

Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)=e^{-x^2}$.

$f''(x)=-2\left(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}\right)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$

$f''(x)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

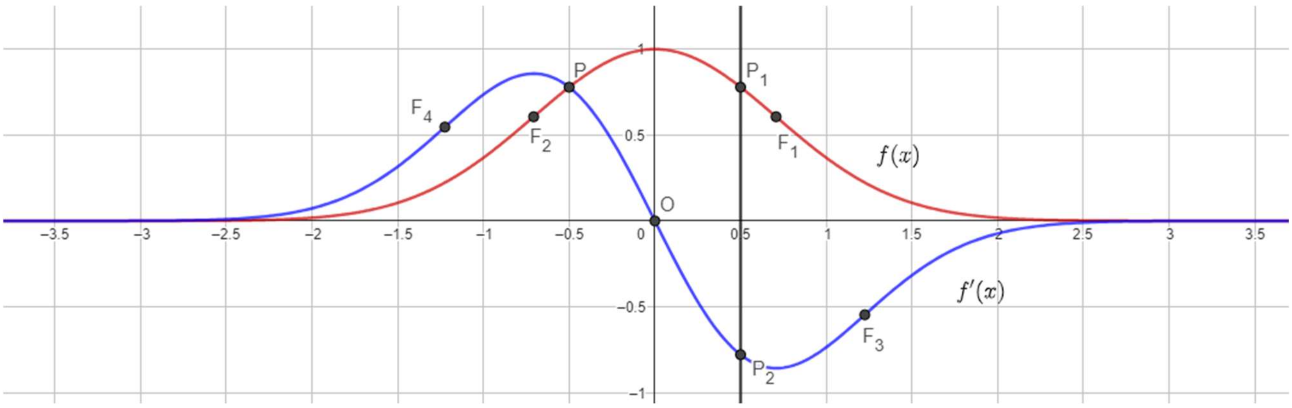
che costituiscono le ascisse dei punti di flesso di $f(x)$ e dei punti di massimo e minimo di $f'(x)$.

Deriviamo ulteriormente $f'(x)$ per studiarne i flessi:

$f'''(x)=2e^{-x^2}\left[-2x\left(2x^2-1\right)+4x\right]=4xe^{-x^2}\left(-2x^2+3\right)$

$f'''(x)=4xe^{-x^2}\left(-2x^2+3\right)=0$ si annulla per $x=0 \vee x=\mp\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, ascisse dei punti di flesso di $f'(x)$,

Riportiamo i grafici delle due funzioni con evidenziati i punti F_1 e F_2, flessi di $f(x)$ e F_3 e F_4, flessi di $f'(x)$



Cerchiamo il punto di intersezione delle due curve:

$$e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2}\left(1+2x\right)=0$$

che ha come unica soluzione $x=-\dfrac{1}{2}$. Il punto P ha pertanto coordinate

$$P=\left(-\frac{1}{2},e^{-\frac{1}{4}}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$$

b)

I punti P_1 e P_2 hanno coordinate

$P_1=\left(t,e^{-t^2}\right)$ e $P_2=\left(t,-2te^{-t^2}\right)$

Il segmento P_1P_2 ha lunghezza

$$L(t)=\overline{P_1P_2}=\left|e^{-t^2}+2te^{-t^2}\right|=\left|e^{-t^2}\left(1+2t\right)\right|$$

Deriviamo la funzione *L*(t) in modo da cercarne il valore massimo:

$$L'(t)=e^{-t^2}\left[-2t\left(1+2t\right)+2\right]\operatorname{sgn}\left[e^{-t^2}\left(1+2t\right)\right]=-2e^{-t^2}\left[2t^2+t-1\right]\operatorname{sgn}\left[e^{-t^2}\left(1+2t\right)\right]$$

che si annulla per

$$2t^2+t-1=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1 \vee t=\frac{1}{2}$$

I due valori corrispondono alle ascisse dei punti per i quali è massima la lunghezza del segmento rispettivamente a sinistra e a destra del punto di intersezione P.

Dalla verifica diretta dei valori:

$L(-1)=e^{-1}$ e $L\left(\dfrac{1}{2}\right)=2e^{-\frac{1}{4}}$,

o con l'ausilio del grafico, osserviamo che la lunghezza massima si ottiene per $t=\dfrac{1}{2}$.

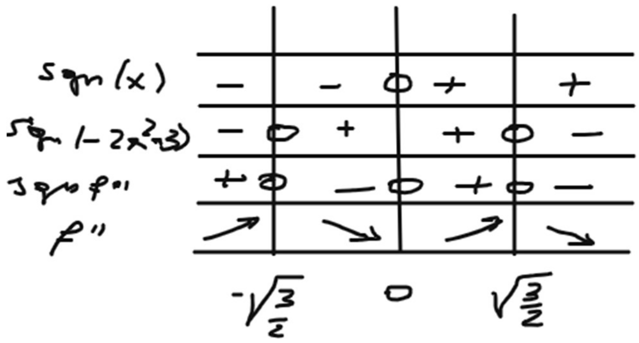
c)

$$f''(x)=-2\left(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}\right)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$$

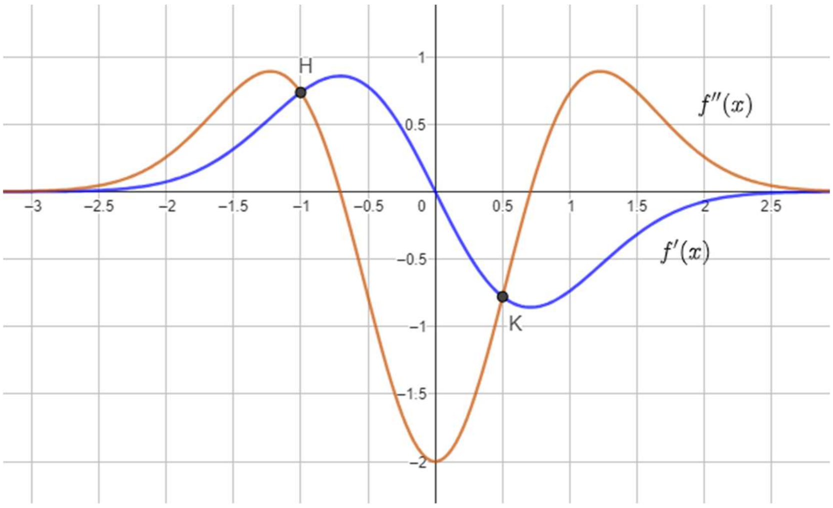
Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse *y*).

$$\lim_{x\to\mp\infty} f''(x)=\lim_{x\to\mp\infty} 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)=0^-$$

Abbiamo già calcolato gli zeri della funzione $f'''(x)=4xe^{-x^2}\left(-2x^2+3\right)=0$, derivata di $f''(x)$, che si annulla per $x=0 \vee x=\mp\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Studiamone il segno:



I due grafici sono riportati nello spesso piano cartesiano:



Cerchiamo le ascisse dei punti H e K nei quali si intersecano:

$$f'(x)=f''(x) \quad \Rightarrow \quad -2xe^{-x^2}=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$$

Osserviamo che:

$$f'(x)-f''(x)=\frac{d}{dx}\left[f(x)-f'(x)\right]$$

per cui le soluzioni solo le stesse che abbiamo trovato al punto b):

$$x=-1 \vee x=\frac{1}{2}$$

L'area della regione finita limitata dalle due curve si trova mediante l'integrale:

$$A=\int_{-1}^{1/2}\left[f'(x)-f''(x)\right]dx=$$

La primitiva della funzione integranda è la funzione $h(x)=f(x)-f'(x)$:

$$A=\left[f(x)-f'(x)\right]_{-1}^{1/2}=\left[e^{-x^2}+2xe^{-x^2}\right]_{-1}^{1/2}=\left[e^{-x^2}(1+2x)\right]_{-1}^{1/2}=2e^{-1/4}+e^{-1}\approx 1,93$$

d)

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{f'(x)}$$

Le due funzioni sono derivabili e infinitesime in 0, per cui è possibile applicare il teorema di de l'Hopital; tuttavia, per agevolare la risposta successiva, sviluppiamo il termine a numeratore:

$$\int_0^x f(t)\,dt=(x-0)f(c)=xf(c) \quad \text{con} \quad 0<c<x.$$

Nel limite in cui $x\to 0$ si ha allora:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{f'(x)}$$

La funzione $f(x)$ non si annulla in 0, pertanto il numeratore è un infinitesimo del primo ordine.

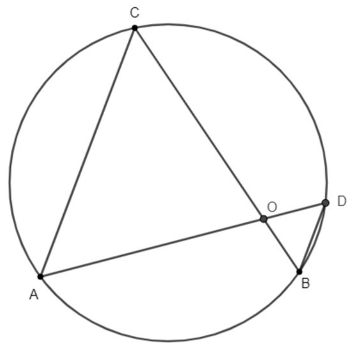
$f(x)$ presenta un massimo in 0, per cui 0 è una radice, nel caso in esame con molteplicità 1, della funzione derivata $f'(x)$, conseguentemente anche $f'(x)$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to 0$.

Sostituendo le funzioni assegnate, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x^2}}{-2xe^{-x^2}}=-\frac{1}{2}$$

QUESITI

1

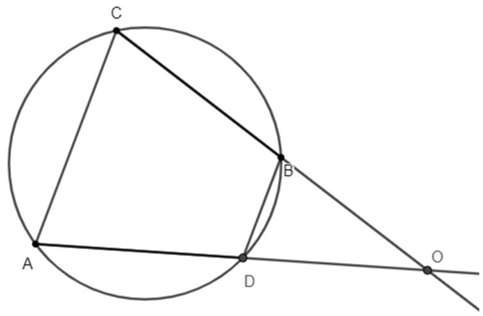


Poiché $AC \parallel BD$ gli angoli $CAO \cong ODB$ e $ACO \cong OBD$ in quanto angoli alterni interni. Inoltre $ACO \cong ODB$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB.

Ne segue che i quattro angoli sono congruenti tra loro:

$CAO \cong ACO \cong OBD \cong ODB$, per cui i triangoli ACO e OBD sono isosceli e simili tra loro per il I criterio di similitudine.

Si procede in modo analogo qualora il punto = sia l'intersezione dei prolungamenti dei segmenti AC e BD, e il punto O sia esterno alla circonferenza.



2

I casi possibili sono $N_p = 6^2 = 36$.

10 può ottenersi in 3 modi: 4+6, 5+5, 6+4, quindi i casi favorevoli sono 3:

$$P(10)=\frac{N_f}{N_p}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

Tra i risultati possibili del lancio vi sono 6 multipli di 2, 4 multipli di 3, 2 multipli di 6 (simultaneamente multipli di 2 e 3, che verrebbero contati due volte). Il numero di casi favorevoli è pertanto:

$N_f = 6+4-2=8$ da cui:

$$P(\text{mult } 2 \vee \text{mult } 3)=\frac{N_f}{N_p}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

$$P(\text{mult } 2 \wedge \text{mult } 3)=\frac{N_f}{N_p}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

3

Scriviamo in forma parametrica l'equazione della retta *r*. Poniamo inizialmente *z* = *u*:

$$r:\begin{cases} z=u \\ y=2u-x \\ 3x+2(2u-x)-1=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=1-4u \\ y=-1+6u \\ z=u \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione della retta *t*, prima in forma vettoriale, quindi in forma parametrica:

$$t:\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{AB}$$

con $t:\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-1,2)-(-2,3,0)=(4,-4,2)$, per cui

$t:(x,y,z)=(-2,3,0)+(4,-4,2)v$ o, in forma estesa:

$$t:\begin{cases} x=-2+4v \\ y=3-4v \\ z=2v \end{cases}$$

Intersechiamo le due rette:

$$r\cap t:\begin{cases} 1-4u=-2+4v \\ -1+6u=3-4v \\ u=2v \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -4u-4v=-3 \\ 6u+4v=4 \\ u=2v \end{cases}$$

Sommando la prima e la seconda equazione si ottiene

$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2} \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ e la seconda equazione si riduce a un'identità.

Il centro della sfera ha pertanto equazioni (poniamo u = ½ nelle equazioni di *r*):

$$C=\left(-1,2,\frac{1}{2}\right)$$

l raggio della sfera è la distanza tra *C* e il piano α:

$$r=\frac{\left|4(-1)-2(2)-4\left(\frac{1}{2}\right)+1\right|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}}=\frac{3}{2}$$

L'equazione della sfera è quindi:

$$(x+1)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

4

Scriviamo la funzione nella forma

$$f(x)=\ln\left(x^3\right)+\frac{3x-3}{x}=3\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)$$

Il suo valore medio nell'intervallo [1, *k*] è

$$m=\frac{\int_1^k 3\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)dx}{k-1}$$

calcoliamo separatamente la primitiva del logaritmo naturale, applicando l'integrazione per parti:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

Sostituiamo nell'equazione del valore medio e completiamo l'integrazione:

$$m = \frac{\int_1^k 3\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)dx}{k-1} = \frac{3\left[x\ln x - x + x - \ln x\right]_1^k}{k-1} = \frac{3\left[(x-1)\ln x\right]_1^k}{k-1} = \frac{3(k-1)\ln k}{k-1} = 3\ln k$$

Imponiamo che

$$3\ln k = 1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(k^3\right) + \ln\left(\frac{5}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{5}{2}k^3\right) = 1$$

da cui infine:

$$\frac{5}{2}k^3 = e \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{\frac{2e}{5}} > 1$$

5

La funzione è continua nel suo insieme di esistenza in quanto somma di funzioni continue; i punti critici di possibile non derivabilità sono i punti in cui si annullano, separatamente, gli argomenti del modulo e della radice.

Per $x \neq -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$ si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3 + x^2\right)^2}} & (x < -1) \cup (-1 < x < 0) \cup (0 < x < 1) \\ 1 + \dfrac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3 + x^2\right)^2}} & x > 1 \end{cases}$$

Consideriamo il modulo, che si annulla per x =1

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1 + \frac{5}{3\sqrt[3]{4}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1 + \frac{5}{3\sqrt[3]{4}}$$

I due limiti sono diversi, pertanto la funzione non è derivabile per x = 1.

Consideriamo ora la radice, che si annulla per x = -1 e x =0; come detto la funzione è continua in entrambi i punti, infatti

$$\lim_{x \to -1}\left(|x-1| + \sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) = 2 = f(-1) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0}\left(|x-1| + \sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) = 1 = f(0)$$

Consideriamo il limite della derivata nei due punti

$$\lim_{x \to -1^{\mp}} f'(x) = \lim_{x \to -1^{\mp}}\left[-1 + \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3 + x^2\right)^2}}\right] = +\infty \quad \text{punto di flesso verticale}$$

$$\lim_{x \to 0^{\mp}} f'(x) = \lim_{x \to 0^{\mp}}\left[-1 + \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3 + x^2\right)^2}}\right]$$

Per il calcolo di questo limite conviene considerare gli infinitesimi principali (potenze di grado minimo) a numeratore e a denominatore:

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} f'(x) = \lim_{x\to 0^{\mp}}\left[-1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}\right] = \lim_{x\to 0^{\mp}}\left[-1+\frac{2}{3x^{1/3}}\right] = \lim_{x\to 0^{\mp}}\left[-1+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right] = \mp\infty$$

si ha un punto di cuspide.

6

Sia $f(x) = a + bx$. Imponiamo le due condizioni:

$$\int_0^1 (a+bx)\,dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} = 1$$

$$\int_1^2 (a+bx)\,dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2}\right]_1^2 = 2a + 2b - a - \frac{b}{2} = a + \frac{3}{2}b = 2$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni si ottiene $a = \frac{1}{2}; b = 1$, per cui la funzione richiesta è

$$f(x) = x + \frac{1}{2}$$

7

Risolviamo senza calcoli,

L'iperbole equilatera assegnata è riferita ai propri asintoti, che coincidono con gli assi cartesiani. Gli assi dell'iperbole sono invece le bisettrici dei due quadranti.

Ruotando l'iperbole di 45° otteniamo un'iperbole equilatera riferita ai propri assi, di equazione

$$x^2 - y^2 = \pm a^2$$

La tangente nei vertici è parallela a uno degli assi coordinati, quindi perpendicolare all'asse dell'iperbole.

La stessa situazione si presenta nell'iperbole originale, per cui le tangenti nei vertici dell'iperbole sono perpendicolari ai suoi assi, ovvero alle bisettrici dei quadranti del sistema di riferimento.

8

Il testo sembra mancare di qualche informazione, o comunque manca di coerenza interna.

Sviluppiamo le informazioni coerenti:

$$f(x) = x^p$$

La sua derivata (p – 1)-esima è

$$f^{p-1}(x) = \left[p(p-1)(p-2)\ldots\cdot 2\right]x = (p!)x$$

La verifica proposta non si adatta a questa situazione, per cui lasciamo in sospeso la questione fino ad eventuale rettifica del testo.