Esame di Stato 2024 – Matematica

Problema 1

1

a)

Il punto *P* ha coordinate *P* (1, 5).

Imponiamo che $f_{a,b}(1)=5 \quad \Rightarrow \quad a+b=5$

e $f'_{a,b}(1)=-7$

Procedendo con la derivata prima:

v

Dal sistema delle due equazioni si ottiene:

$a=1, \quad b=4$

per cui la funzione assume la forma

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}=x+\frac{4}{x^2}$$

b)

Studiamo la funzione $f(x)$:

funziona razionale fratta di terzo grado, definita per $x \in D =]-\infty,0] \cup [0,+\infty[$.

$f(x)>0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^3+4}{x^2}>0$ per $x>-\sqrt[3]{4}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2}=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right)=\mp\infty$: x=0 (asse *y*) è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to 0^{\mp}}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty$$

La funzione si presenta nella forma $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$, per cui possiamo immediatamente concludere che la retta di equazione $y=x$ è asintoto obliquo della funzione.

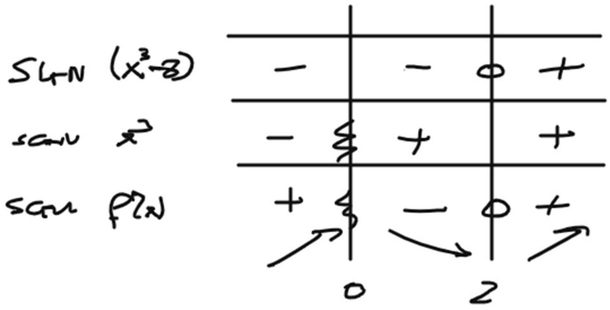
$$f'(x)=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

consideriamo il segno di numeratore e denominatore:

$x^3-8>0 \quad \Rightarrow \quad x>2$ e

$x^3>0 \quad \Rightarrow \quad x>0$

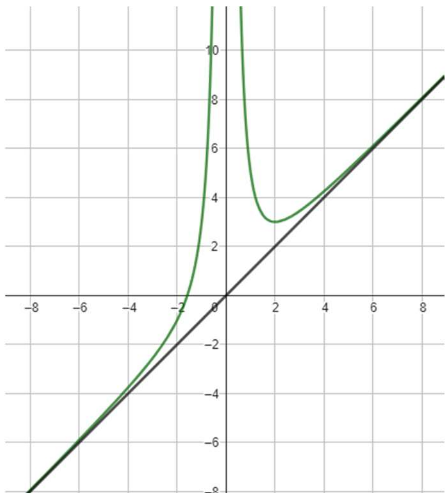
si ha pertanto il seguente schema dei segni:



La funzione presenta un minimo relativo in (2,3)

$$f''(x)=\frac{24}{x^4}>0 \quad \forall x \in D .$$

quindi la funzione presenta sempre la concavità rivolta verso l'alto; il suo grafico è



Consideriamo un generico punto *A* della curva di coordinate $A=\left(\alpha,\alpha+\frac{4}{\alpha^2}\right)$.

Imponiamo che la retta tangente al grafico di *f(x)* in *A* passi per il punto *P*.

La pendenza della retta tangente in *A* è $m=f'(\alpha)=1-\frac{8}{\alpha^3}$, per cui la retta tangente ha equazione:

$$m=f'(\alpha)=1-\frac{8}{\alpha^3}$$

$$y-\left(\alpha+\frac{4}{\alpha^2}\right)=\left(1-\frac{8}{\alpha^3}\right)(x-\alpha) \quad \Rightarrow \quad y=\left(1-\frac{8}{\alpha^3}\right)x+\frac{12}{\alpha^2}$$

Imponiamo il passaggio per *P* (1,5):

$$\left(1-\frac{8}{\alpha^3}\right)+\frac{12}{\alpha^2}=5 \quad \Rightarrow \quad \alpha^3-3\alpha+2=0$$

Sappiamo che l'equazione ammette soluzione $\alpha = 1$, quindi si può scomporre il polinomio mediante la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

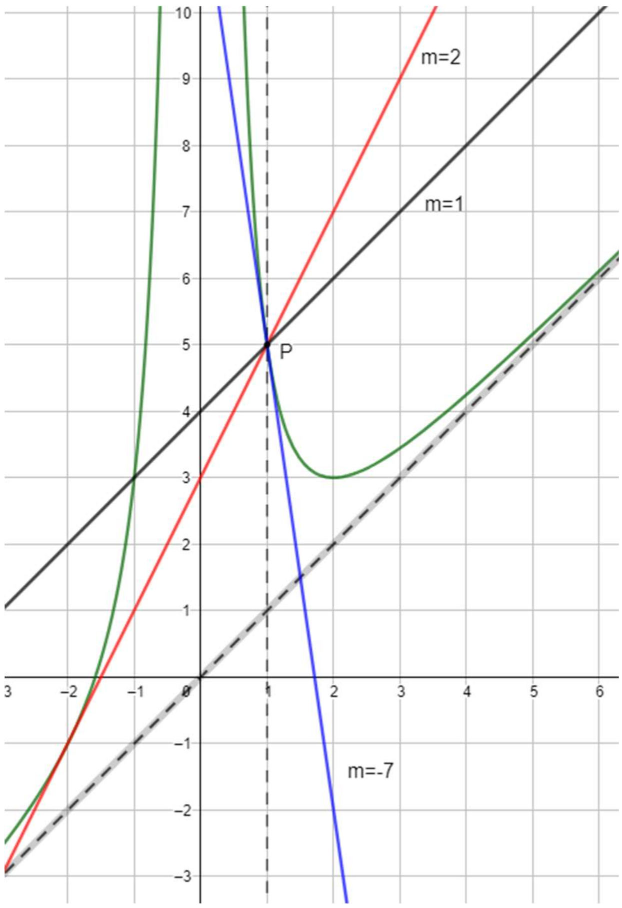
che comporta: $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = (\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)$

per cui il punto di tangenza è $A = (-2, -1)$ e la retta tangente ha equazione:

$y = 2x + 3$

c)

Riportiamo il grafico della funzione evidenziando le due tangenti in *P*, nonché la retta verticale di equazione *x* = 1 e la retta passante per *P* parallela all'asintoto di γ:



L'equazione $y - 5 = m(x - 1)$ rappresenta il fascio proprio di rette di centro *P* che, all'aumentare di *m*, ruota in verso antiorario. Aiutandoci con il grafico possiamo concludere:

per $m < 1$: 3 intersezioni (per *m* = -7 si hanno due punti di intersezione coincidenti e uno distinto);

per $m = 1$: la retta è parallela all'asintoto della curva, si hanno pertanto 2 punti di intersezione

per $1 < m \leq 2$: 3 punti di intersezione (di cui 2 coincidenti per *m* = 2)

$m > 2$: un solo punto di intersezione (il punto *P*).

d)

La retta *t* e l'asintoto di γ si intersecano in

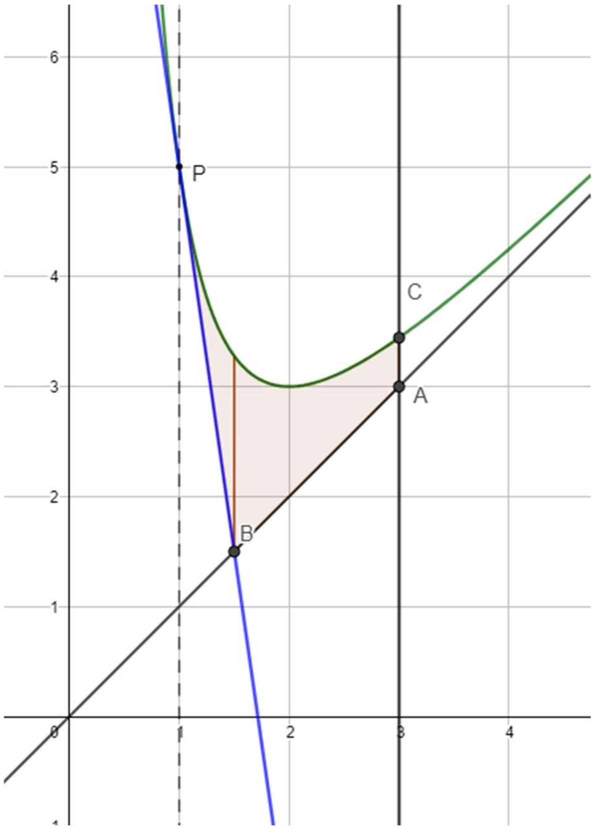
$$\begin{cases} y = -7x + 12 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

L'integrale richiesto assume la forma:

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x^3 + 4}{x^2} - (-7x + 12)\right] dx + \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} \left[\frac{x^3 + 4}{x^2} - x\right] dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(8x - 12 + \frac{4}{x^2}\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{4}{x^2} dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \left(8x - 12 + \frac{4}{x^2}\right) dx + \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{4}{x^2} dx = \left|4x^2 - 12x - \frac{4}{x}\right|_1^{\frac{3}{2}} + \left|-\frac{4}{x}\right|_{\frac{3}{2}}^{+\infty} = 9 - 18 - \frac{8}{3} - 4 + 12 + 4 + \frac{8}{3} = 3$$

L'integrale individua l'area della parte di piano compresa all'interno della curva chiusa BPAC; nel limite con $k > +\infty$. i punti A e C tendono a coincidere, e il limite fornisce l'area finita della regione non limitata di piano compresa tra la retta t¸la curva γe il suo asintoto obliquo.



Problema 2

a)

$$f_n(x) = x^{\frac{2}{n}} - \left(ax^2 + bx + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_n'(x) = \frac{2}{n} x^{\frac{2-n}{n}} - \frac{1}{2}\left(ax^2 + bx + 1\right)^{-\frac{1}{2}}(2ax + b)$$

Per verificare la derivabilità in 0, calcoliamone il limite per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} f_n'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{n} x^{\frac{2-n}{n}} - \frac{1}{2}\left(ax^2 + bx + 1\right)^{-\frac{1}{2}}(2ax + b)\right]$$

il secondo addendo fornisce un contributo finito:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-2}{n}}} - \frac{b}{2}$$

L'esponente $\dfrac{n-2}{n} = 1 - \dfrac{2}{n} > 0$ per $n > 2$

per *n=2* la funzione diventa:

$$f_2(x) = \sqrt{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1} = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$$

e presenta in 0 un punto angoloso (retta tangenti $y = \pm x$), per *n > 2* si hanno le due possibilità:

n pari: $= \lim_{x\to 0} \frac{2}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-2}{n}}} - \frac{b}{2} = \mp\infty$ (punto di cuspide)

$\lim_{x\to 0} \frac{2}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-2}{n}}} - \frac{b}{2} = +\infty$ flesso verticale

Calcoliamo i parametri della curva $f_2(x)$:

$$f_2(x) = f_2(-x) \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

La funzione è definita in [-1,1], per cui il radicando:

$ax^2 + 1 > 0$ in [-1,1], condizione verificata per a = -1.

Si ha pertanto:

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$$

b

$$g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$$

La funzione presenta alcune delle caratteristiche già esaminate per $f_2(x)$:

$g(x)$ è definita in [-1,1], continua e positiva in questo intervallo, simmetrica rispetto all'asse *y*, presenta in 0 un punto angoloso, con semitangenti $y = \pm x$

Possiamo limitarci a studiare la funzione $g_+(x)$ ristretta all'intervallo [0,1]

$$g'_+(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x > 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} g'_+(x) = -\infty,$$

Studiamo il segno di $g'_+(x)$

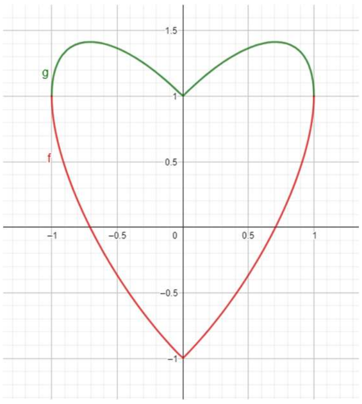
$$g'_+(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1$$

poiché *x* > 0 possiamo elevare al quadrato i due membri, ottenendo:

$$x^2 < 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$g_+(x)$ è crescente in tale intervallo, e ammette un massimo di coordinate $M = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.

utilizzando la simmetria rispetto all'asse *x*, possiamo tracciare il grafico β, che uniamo al grafico α:



c

La lunghezza del segmento PQ è data da:

$$s(x) = \overline{PQ} = g(x) - f_2(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} - \left(|x| - \sqrt{1-x^2}\right) = 2\sqrt{1-x^2}$$

deriviamo tale funzione per cercarne il massimo:

$$s'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$s(x)$ non è derivabile in 0, ma $s'(x) < 0$ per $x > 0$, quindi la funzione è strettamente decrescente in]0,1[: ne segue che assume valore massimo per *x* = 0.

d

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \sqrt{1-x^2} = h(x)$$

per cui $H(x)$ è una primitiva di $h(x)$.

L'area delimitata da γ è data da

$$S = 2\int_0^1 s(x)\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\left|\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right|_0^1 = \pi$$

QUESITI

1

In un triangolo rettangolo l mediana è congruente a metà ipotenusa.
Se l'altezza del triangolo è congruente a metà ipotenusa, altezza e mediana coincidono, per cui il triangolo è isoscele.

Per il teorema inverso, se il triangolo è rettangolo isoscele, altezza e mediana coincidono; poiché la mediana

2

In una sequenza di 5 lanci si devono ottenere, in ordine qualsiasi, 2 teste e (probabilità *p*) e 3 croci (probabilità 1-*p*); la probabilità richiesta è:

$$P(p)=\binom{5}{2}p^2(1-p)^3=10p^2(1-p)^3$$

Deriviamo la funzione *P*(*p*) rispetto alla variabile *p:*

$$P'(p)=20p(1-p)^3-30p^2(1-p)^2=10p(1-p)^2(2-5p)$$

che si annulla per *p* = 0, *p* = 1 (entrambi non accettabili) e $p=\frac{2}{5}$, cui corrisponde la probabilità massima

$$P_{\max}=10\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3\simeq 0,346$$

3

Il vettore (3, -2, 0) ha la direzione della normale al piano π. La retta passante per *P* perpendicolare al piano π ha pertanto equazione

$$r:(x,y,z)=(4,2,1)+(3,-2,0)t$$

che, in forma parametrica, diviene:

$$(x,y,z)=(4+3t,2-2t,1)$$

Intersecando tale retta con il piano si ottiene l'equazione nella variabile *t*:

$$3(4+3t)-2(2-2t)+5=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

Il punto *H* ha pertanto coordinate $H=(1,4,1)$

Scriviamo il sistema con le equazioni della retta *s* e del piano π:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ z-2=0 \\ 3x-2y+5=0 \end{cases}$$

che si risolve immediatamente per sostituzione, fornendo le coordinate del punto di intersezione:

$A=(-3,-2,2)$

4

Consideriamo la funzione

$f(x)=x^3+x-\cos x$

continua in $\mathbb{R}$, la cui derivata

$f'(x)=3x^2+1+\sin x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ in quanto $1+\sin x>0$ per $x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ e $f'(x)=3x^2+1+\sin x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$f(x)$ è pertanto strettamente crescente in $\mathbb{R}$; inoltre

$f(0)=-1<0$ e $f(1)=2-\cos 1>0$.

Per il teorema di esistenza e unicità degli zeri, la funzione si annulla una sola volta nell'intervallo]0,1[.

5

La funzione polinomiale di quarto grado ha equazione

$p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Poiché il suo grafico è tangente nell'origine all'asse *x*, x = 0 è soluzione dell'equazione con molteplicità almeno 2, per cui

$d=e=0$

Imponiamo la condizione di passaggio per (1,0) e per (2,-2):

$a+b+c=0$

$16a+8b+4c=-2 \quad \Rightarrow \quad 8a+4b+2c=-1$

Per la stazionarietà di (2,-2) si ha infine:

$p'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx \quad \Rightarrow \quad p'(2)=32a+12b+4c=0$

ovvero

$8a+3b+c=0$

Il sistema delle tre equazioni ha soluzione

$a=1$, $b=-\frac{7}{2}$; $c=\frac{5}{2}$

La funzione richiesta è pertanto:

$p(x)=x^4-\frac{7}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2$

6

$$F(x)=\int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt=\left|-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right|_a^x=-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{a}\right)$$

Imponiamo la condizione

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{a}\right)=\sin\left(\frac{1}{a}\right)-1=-\frac{1}{2}$$

ovvero $\sin\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}$

che ha soluzioni:

$\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ e $\frac{1}{a}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$

Il valore massimo di *a* si ottiene in corrispondenza del minimo di 1/a: dalla prima soluzione si ottiene $a=\frac{6}{\pi}$

che tuttavia non soddisfa la condizione $x=\frac{2}{\pi}>a$.

Dalla seconda soluzione si ottiene $a=\frac{6}{5\pi}$ che soddisfa la condizione $x=\frac{2}{\pi}>\frac{6}{5\pi}=a$, quindi è accettabile.

7

Riferiamo l'ellisse, nella quale il sole occupa uno dei due fuochi, ai propri assi, con asse focale coincidente con l'asse *x*; la sua equazione è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Il semiasse maggiore è la semisomma delle distanze di perielio e afelio; utilizzando provvisoriamente come unità di riferimento 10^{11} m, si ha:

$$a=\frac{1,52+1,47}{2}=1,495$$

La differenza tra il semiasse maggiore e la distanza Sole-perielio fornisce la distanza focale *c*:

$$c=1,495-1,470=0,025$$

la cui conoscenza consente di ricavare il semiasse minore dell'ellisse:

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{1,495^2-0,025^2}=1,4948$$

L'equazione dell'ellisse è pertanto:

$$\frac{x^2}{\left(1,4950\cdot10^{11}\ \mathrm{m}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(1,4948\cdot10^{11}\ \mathrm{m}\right)^2}=1$$

8

L'angolo al centro che sottende un lato dell'esagono inscritto nella circonferenza è 60°, per cui per cui raggio della circonferenza circoscritta *R* e apotema *a* sono rispettivamente lato e altezza di un triangolo equilatero. Si ha pertanto:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

Con i valori del testo, *R* = 60 mm, si ha:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(60 \text{ mm}\right) = 51{,}96 \text{ mm} = 5{,}196 \text{ cm}$$

Per pavimentare un piano con poligoni regolari congruenti, è necessario che gli angoli interni del poligono siano un sottomultiplo intero dell'angolo giro; i poligoni possibili sono pertanto:

- Triangoli equilateri: angoli interni 60°, necessarie 6 piastrelle per ricoprire l'angolo giro;
- Quadrati: angoli interni 90°, necessarie 4 piastrelle
- Esagoni regolari: angoli interni 120°, necessarie 3 piastrelle.

  Notiamo che gli angoli interni del pentagono regolare misurano 108°, che non è sottomultiplo di 360°, pertanto on sono utilizzabili piastrelle pentagonali.

-