Esame di Stato 2023 – Sessione suppletiva - Matematica

Problema 1

1

a)

$$f(x)=ax\ln x-\frac{3}{2}x \text{ definita in }]0,+\infty[$$

$$f'(x)=a\left(\ln x+1\right)-\frac{3}{2}$$

Imponiamo che $f'(\sqrt{e})=0 \quad\Rightarrow\quad a\left(\ln\sqrt{e}+1\right)-\frac{3}{2}=\frac{3a}{2}-\frac{3}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad a=1$

La funzione è pertanto:

$$f(x)=x\ln x-\frac{3}{2}x=x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)$$

con $f'(x)=\ln x-\frac{1}{2}$

Studio del segno:

$$f(x)>0 \quad\Rightarrow\quad x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)>0 \quad\Rightarrow\quad x>e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$$

Segno e limiti:

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{1/x}-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, per cui può essere applicato il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}\left(-x\right)=0^-$$

Determiniamo come la funzione si avvicina a 0:

$$\lim_{x\to0^+}f'\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)=-\infty$$

per cui la funzione tende ad essere tangente all'asse *y*.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln x-\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)\right]=+\infty$$

La funzione non ammette asintoto obliquo in quanto diverge come $x\ln x$

Andamento della funzione:

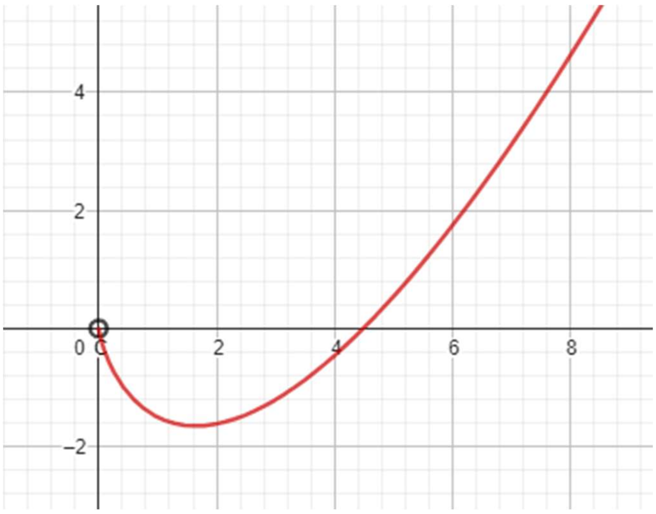
$$f'(x)=\ln x-\frac{1}{2}>0 \quad \Rightarrow \quad x>e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$ (funzione crescente)

La funzione presenta un minimo in $\left(\sqrt{e},-2\sqrt{e}\right)$

Concavità:

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0 \quad \forall x\in\left]0,+\infty\right[$$

Il grafico della funzione è il seguente:



b)

Consideriamo sulla curva il punto P di coordinate $\left(\alpha,\alpha\left(\ln\alpha-\frac{3}{2}\right)\right)$.

La tangente in tale punto ha coefficiente angolare $m=f'(\alpha)=\ln\alpha-\frac{1}{2}$ e equazione:

$$y-\alpha\left(\ln\alpha-\frac{3}{2}\right)=\left(\ln\alpha-\frac{1}{2}\right)(x-\alpha)$$

Imponiamo il passaggio per Q(0,-1):

$$-1-\alpha\left(\ln\alpha-\frac{3}{2}\right)=-\alpha\left(\ln\alpha-\frac{1}{2}\right)$$

che ha come unica soluzione $\alpha=1$.

Il punto di tangenza è pertanto: $T\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ e la tangente ha equazione $t: y=-\frac{1}{2}x-1$

c)

Le due curve devono essere tangenti in *T* alla retta *t*:

Imponiamo il passaggio della seconda, funzione omografica, per $T\left(1,-\frac{3}{2}\right)$:

$$\frac{1+h}{1+k}=-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad h=-\frac{3}{2}k-\frac{5}{2}$$

Deriviamo la seconda funzione:

$$y'=\frac{k-h}{(x+k)^2} \quad \Rightarrow \quad y'(1)=\frac{k-h}{(1+k)^2}=-\frac{1}{2}$$

Sostituiamo *h* e risolviamo, ottenendo:

$$k=-6, \quad h=\frac{13}{2}$$

d)

$$g(x)=\int_1^x\left(-\frac{3}{2}t+t\ln t\right)dt$$

Poiché è richiesta l'espressione analitica di *g(x)*, integriamo per parti il secondo addendo:

$$g(x)=\left|-\frac{3}{4}t^2+\frac{t^2}{2}\ln t\right|_1^x-\int_1^x\frac{t}{2}dt=-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{3}{4}-\left|\frac{t^2}{4}\right|_1^x=-x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x+1$$

Ovviamente

$$g'(x)=f(x)=x\ln x-\frac{3}{2}$$

A partire dalla funzione *f* possiamo determinare le caratteristiche essenziali di *g*:

Dominio: $]0,+\infty[$

$$g(1)=0$$

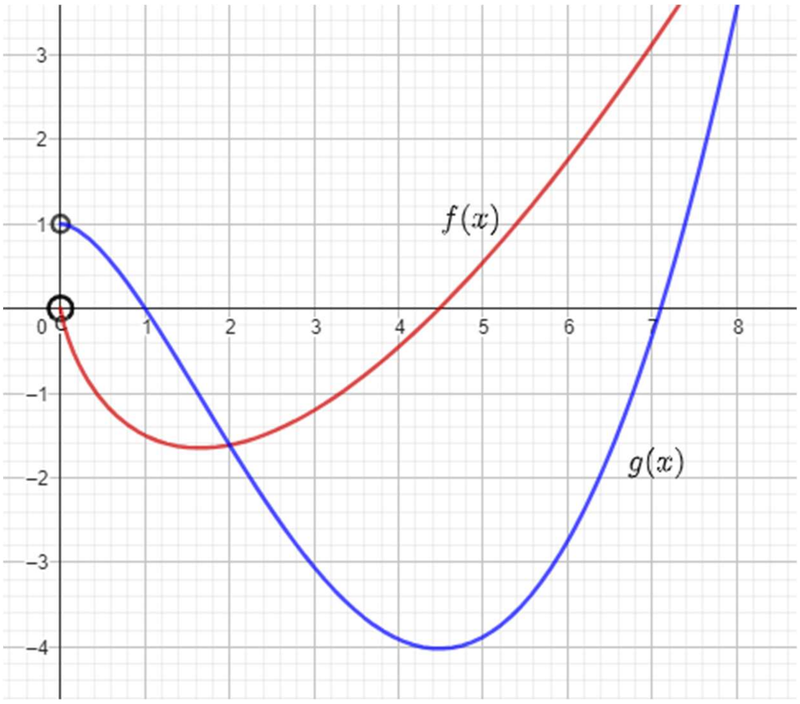
$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x+1\right)=1$$

(calcolo della forma indeterminata analogo al calcolo nel punto (o gerarchia degli infiniti)

g(x) crescente per $x>e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$, con minimo assoluto in $\left(e\sqrt{e},1-\frac{e^3}{4}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\right]+1=+\infty$$

Riportiamo infine il grafico di *g*(x), sovrapposto a quello di *f*(x):



$f(x)$
$g(x)$

Problema 2

a)

La funzione P(x) ha un flesso orizzontale in 0, pertanto si deve avere:

$$P(0)=P'(0)=P''(0)=0$$

La terza condizione è ovviamente soddisfatta dalla derivata seconda assegnata; integrando P''(x) si ottiene:

$$P'(x)=\int P''(x)\,dx=\int\left(12x^2-24x\right)dx=4x^3-12x^2+c$$

per la condizione di tangenza orizzontale, $c=0$, per cui si ha infine:

$$P'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$$

Integrando una seconda volta e imponendo che la costante sia ancora nulla si ottiene infine:

$$P(x)=\int P'(x)\,dx=\int\left(4x^3-12x^2\right)dx=x^4-4x^3=x^3(x-4)$$

Verifichiamo che la funzione ottenuta ha una radice tripla in 0 (flesso orizzontale) e una radice per $x = 4$, come riportato sul grafico.

La funzione ottenuta presenta un minimo relativo in $x=3$, punto in cui si annulla la sua derivata; per $x=3$ la funzione Q(x) presenta un massimo, da cui deduciamo che $k< 0$.

Imponiamo che:

$$Q(3)=kP(3)=\frac{27}{4}\quad\Rightarrow\quad -27k=\frac{27}{4}\quad\Rightarrow\quad k=-\frac{1}{4}$$

Pertanto:

$$Q(x)=-\frac{1}{4}x^3(x-4)$$

b)

$$y=P(x)\cdot Q(x)=-\frac{1}{4}x^6(x-4)^2$$

La funzione, polinomiale di grado 8, è definita nell'insieme $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\mp\infty} g(x)=\lim_{x\to\mp\infty}\left[-\frac{1}{4}x^6(x-4)^2\right]=-\infty$$

si annulla in $x=0$ (6 soluzioni coincidenti) e in $x=4$ (2 soluzioni coincidenti); per $(x\neq 0)\wedge(x\neq 4)$ la funzione ha segno negativo, pertanto la funzione presenta due massimi assoluti in $x=0$ e in $x=4$.

Calcoliamo y'(x) e y''(x) per determinare i flessi:

$$y=P(x)\cdot Q(x)=-\frac{1}{4}P^2(x)\quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{1}{2}P(x)P'(x)\quad\Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{2}\left[x^3(x-4)\right]\left[4x^2(x-3)\right] = -2x^5(x-4)(x-3)$$

Le parentesi quadre sono state inserite al solo scopo di evidenziare i due termini.

La funzione presenta, oltre ai due massimi già noti, un terzo punto stazionario, necessariamente di minimo relativo, in $x = 3$:

$$\min\left(3, -\frac{729}{4}\right)$$

Per calcolare la derivata seconda, conviene sviluppare la derivata prima:

$$y' = -2x^5(x-4)(x-3) = -2\left(x^7 - 7x^6 + 12x^5\right)$$

da cui otteniamo:

$$y'' = -2\left(7x^6 - 42x^5 + 60x^4\right) = -2x^4\left(7x^2 - 42x + 60\right)$$

Le cui radici sono $x = 0$, soluzione quadrupla, cui non corrisponde un cambio di concavità (è il massimo relativo già analizzato) e $x = \frac{21 \mp \sqrt{21}}{14}$.

Consideriamo ora la funzione

$$y = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^3(x-4)}$$

Dominio: $]-\infty, 0[\, \cup \,]0, 4[\, \cup \,]4, +\infty[$

Non presenta zeri.

$y > 0$ per $x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]4, +\infty[$

Le rette $x = 0$ e $x = 4$ sono asintoti verticali.

$$y = \frac{1}{P(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-P'(x)}{P^2(x)} = -\frac{4x^2(x-3)}{x^6(x-4)^2} = -\frac{4(x-3)}{x^4(x-4)^2}$$

Presenta un massimo relativo in $\left(3, -\frac{1}{27}\right)$.

$$y'' = -\frac{P''P^2 - 2PP'}{P^4} = -\frac{P''P - 2P'}{P^3} = -\frac{4\left(5x^2 - 30x + 4\right)8}{x^5(x-4)^3}$$

Omettiamo il dettaglio calcolo, laborioso e fine a se stesso.

La funzione non presenta punti di flesso.

c)

L'area richiesta è data dall'integrale definito:

$$S = -\int_0^4 \left(x^4 - 4x^3\right)dx = \int_0^4 \left(4x^3 - x^4\right)dx = \left| x^4 - \frac{x^5}{5} \right|_0^4 = \frac{256}{5}$$

d)

Deriviamo la funzione *F*(x):

$$F'(x) = \frac{1}{4}\frac{x}{x-4}\frac{x-x+4}{x^2} = \frac{1}{x(x-4)} = \frac{x^2}{x^3(x-4)} = \frac{x^2}{P(x)}$$

quindi *F*(x) è una primitiva di $\frac{x^2}{P(x)}$ per $x \geq 5$.

$$\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}\,dx = \frac{1}{4}\left|\ln\frac{x-4}{x}\right|_5^t = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{t-4}{t} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{5(t-4)}{t}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_5^t \frac{x^2}{P(x)}\,dx = \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{5(t-4)}{t} = \frac{\ln 5}{4}$$

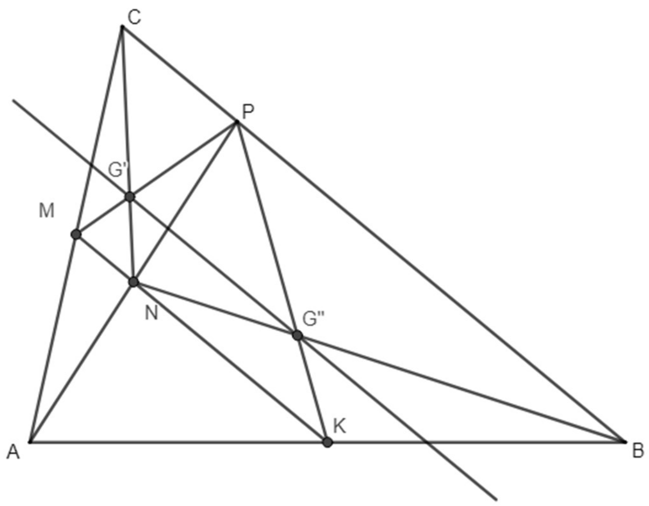
La funzione $f(x) = \frac{x^2}{P(x)}$ è positiva per $x \geq 5$, quindi l'integrale individua l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse *x.*

Per $x \to +\infty$ *f*(x) converge a zero con l'ordine di $\frac{1}{x^2}$, per cui la funzione è integrabile in senso improprio e il limite calcolato individua l'estensione della regione non limitata di paino compresa tra la curva e l'asse *x*, per $x \geq 5$.

QUESITI

1

Con riferimento alla figura, tracciamo le mediane relative ai lati AB, AP, AC che permettono di individuare i baricentri G' e G''.
Il segmento MK, che congiunge i punti medi dei lati AC e AB del triangolo ABC è parallelo al terzo lato BC; il punto N appartiene al segmento MK tuttavia non è influente ai fini della dimostrazione, per cui non serve verificarlo.
Il baricentro G' divide la mediana PM in due parti, tali che PG'= 2G'M; analogamente PG''=2G''K; per il teorema di Talete inverso $GG'\parallel MK$; poiché $MK\parallel BC$, per la proprietà transitiva segue che $GG'\parallel BC$.



2

Per soddisfare la prima condizione, su 8 lanci, 3 devono avere come esito la faccia "5" (probabilità 1/6), 5 lanci una faccia diversa da "5" (probabilità 5/6), pertanto:

$$P=\binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{21875}{209952}\approx 0,104$$

Per soddisfare la seconda condizione, la faccia "5" deve uscire 2 volte nei primi 7 lanci, quindi nuovamente all'ottavo; la probabilità è pertanto:

$$P=\left[\binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\right]\cdot\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{21875}{559872}\approx 0,040$$

3

La retta normale al piano dato nel punto P ha equazione:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}t$$

cerchiamo su di essa i punti C e C' aventi distanza dal piano pari al raggio della circonferenza:

$$\overline{CP}=\sqrt{(3t)^2+(4t)^2+(-5t)^2}=5\sqrt{2}$$

da cui segue:

$$5\sqrt{2}\,|t|=5\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad t=\pm 1$$

I centri delle sfere sono pertanto:

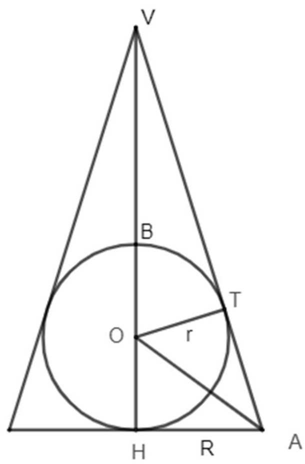
$$C(2,6,-2)\ \text{e}\ C'(-4,-2,8)$$

e le rispettive equazioni:

$$(x-2)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=50 \text{ e } (x+4)^2+(y+2)^2+(z-8)^2=50$$

4

Consideriamo una sezione del cono e della sfera inscritta; indichiamo con *R* il raggio di base del cono, con *h* la sua altezza.



Dalla similitudine tra i triangoli VOT e VHA (triangoli rettangoli con l'angolo AVH in comune) si ottiene:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OV}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AV}} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{h-r}=\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

Eleviamo al quadrato e esplicitiamo R^2:

$$R^2=\frac{r^2h}{h-2r}$$

Il volume del cono è dato da:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2h^2}{h-2r}$$

Deriviamo rispetto alla variabile *h* per cercarne il valore minimo:

$$\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2}$$

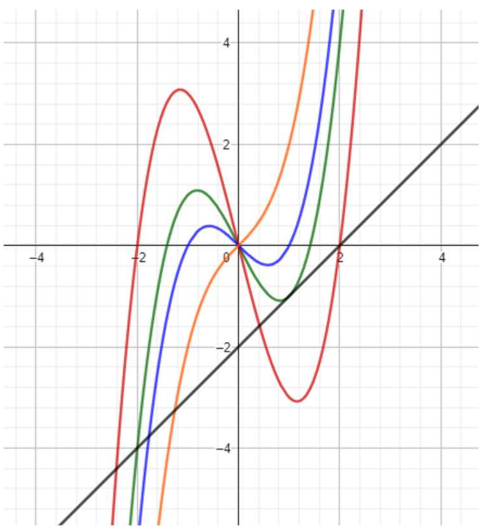
che presenta un minimo per $h=4r$.

La distanza tra il vertice del cono e la superficie della sfera è pertanto:

$$\overline{VB}=h-2r=2r$$

5

Cerchiamo in quale punto la derivata della funzione che esprime la curva data è uguale alla pendenza della retta:



$$y'=3x^2+k=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{1-k}{3}} \quad k\le 1$$

i due valori trovati individuano le ascisse dei possibili punti di tangenza.

Osserviamo che la curva assegnata è una cubica, simmetrica rispetto all'origine, con coefficiente del termine di terzo grado positivo per cui, al variare di *k*, ha l'andamento tipico riportato in figura.

La tangenza con la retta di equazione $y=x-2$ è possibile solo nel quarto quadrante, quindi la sola soluzione accettabile, tra le 2 trovate, è quella positiva. Sostituendola nell'equazione della curva troviamo l'ordinata del punto di tangenza:

$$y=\left(\sqrt{\frac{1-k}{3}}\right)^3+k\sqrt{\frac{1-k}{3}}=\sqrt{\frac{1-k}{3}}\left(\frac{1-k}{3}+k\right)=\frac{2k+1}{3}\sqrt{\frac{1-k}{3}}$$

Imponiamo che tale punto appartenga anche alla retta:

$$\frac{2k+1}{3}\sqrt{\frac{1-k}{3}}=\sqrt{\frac{1-k}{3}}-2$$

che, con qualche semplice passaggio algebrico, assume la forma:

$$\sqrt{\frac{1-k}{3}}\,\frac{1-k}{3}=1$$

con soluzione k = -2 (curva verde in figura).

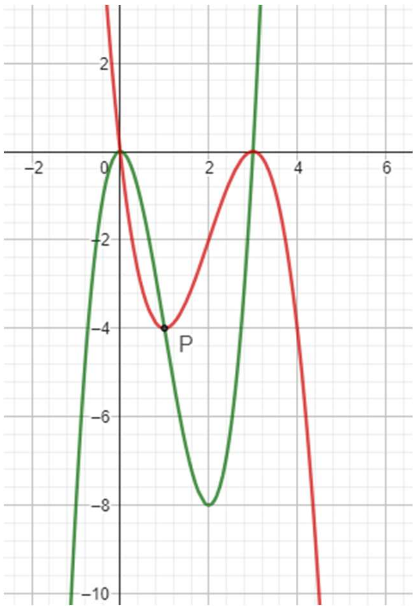
6

Le condizioni sugli zeri comportano che la funzione possa assumere una delle seguenti forme:

a) $y=ax^2(x-3)$ (tangente all'asse x nell'origine) oppure

b) $y=ax(x-3)^2$ (tangente all'asse x nel punto di ascissa 3)

Imponendo il passaggio per P (1, -4) si ha:



a) $a=2 \quad \Rightarrow \quad y=2x^2(x-3)$ (curva verde)

b) $a=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-x(x-3)^2$ (curva rossa)

Le due curve sono riportate nella figura a lato.

Calcoliamo nei due casi l'area della regione finita di piano compresa tra la curva e l'asse x:

a) $$S=-\int_0^3 2x^2(x-3)\,dx=2\int_0^3(3x^2-x^3)\,dx=2\left|x^3-\frac{x^4}{4}\right|_0^3=\frac{27}{2}$$

b) $$S=-\int_0^3 -x(x-3)^2\,dx=\int_0^3(x^3-6x^2+9x)\,dx=\left|\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9x^2}{2}\right|_0^3=\frac{27}{4}$$

7

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quindi si può applicare il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x(t^2-1)e^{2t}dt}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)e^{2x}}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)e^{2x}}{2}=e^2$$

8

1. $A \Rightarrow B$: vera

Poiché la funzione è continua e derivabile in un intervallo aperto (a, b), il punto x_0 di massimo o minimo locale, interno all'intervallo, è stazionario, per cui $f'(x_0)=0$.

2. $B \Rightarrow A$: falsa

Controesempio: $y = x^3$ in (-1, 1) $f'(0) = 0$ ma la funzione non ammette né massimo né minimo in (-1, 1).

3. $A \Leftrightarrow B$: falsa

La proposizione equivale a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, ma la seconda proposizione è falsa.

4. $B \Leftrightarrow A$: falsa; la proposizione è identica alla precedente.