Esame di Stato 2023 – Sessione straordinaria - Matematica

Problema 1

1

a)

$f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ definita in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Due curve f_n e f_m passano per lo stesso punto se

$$2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n} = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^m} \quad \Rightarrow \quad x^n = x^m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n, m > 1$$

equazione risolta da $x = 1$.

Tutte le curve passano per il punto di coordinate (1, 2).

Deriviamo la funzione $f_n(x)$ per determinarne gli estremi:

$$f_n'(x) = \frac{3}{x^2} - n\frac{3}{x^{n+1}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} - \frac{n}{x^{n+1}} > 0$$

Poiché $n > 1$ possiamo scrivere la disequazione nella forma:

$$\frac{x^{n-1} - n}{x^{n+1}} > 0$$

Abbiamo due possibili soluzioni:

- se n pari (n-1 dispari): $x > \sqrt[n-1]{n}$, quindi la curva presenta un minimo locale nel punto di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$
- se n dispari (n-1 pari): il denominatore è sempre positivo nel campo di esistenza, pertanto la disequazione è risolta per

  $x < -\sqrt[n-1]{n} \cup x > \sqrt[n-1]{n}$, quindi la curva presenta un massimo locale nel punto di ascissa $x = -\sqrt[n-1]{n}$ un minimo locale nel punto di ascissa $x = \sqrt[n-1]{n}$

Analizziamo il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}}$$

Possiamo calcolare il limite della funzione di variabile reale

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$$

che possiamo scrivere nella forma esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x-1}}$$

Il limite dell'esponente è nullo (gerarchia degli infiniti), pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^0 = 1$$

All’aumentare di *n* l’ascissa degli estremi tende a 1 (-1 per il massimo nel caso n pari).

Calcoliamo la derivata seconda di $f_n(x)$ per determinarne i flessi:

$$f_n''(x) = \frac{-6}{x^3} + \frac{3n(n+1)}{x^{n+2}} > 0$$

che, analogamente al caso precedente, può essere scritta nella forma

$$\frac{-2x^{n-1} + n(n+1)}{x^{n+2}} > 0$$

- se *n* pari (*n*-1 dispari): $x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$, quindi la curva presenta un flesso nel punto di ascissa $x = \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$

- se n dispari (n-1 pari), la disequazione è risolta per $x < -\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} \cup 0 < x < \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$, quindi la curva presenta due flessi nei punti di ascissa $x = \pm\sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}}$

Procediamo in modo analogo al precedente per il calcolo del limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{n-1}}$$

che risolviamo utilizzando il limite della funzione di variabile reale:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]}{x-1}} = e^0 = 1$$

Anche l’ascissa dei punti di flesso tende a 1 (±1 per *n* dispari).

Determiniamo le caratteristiche degli asintoti

Per *n* pari:

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^n}\right) = +\infty$$

Per *n* dispari:

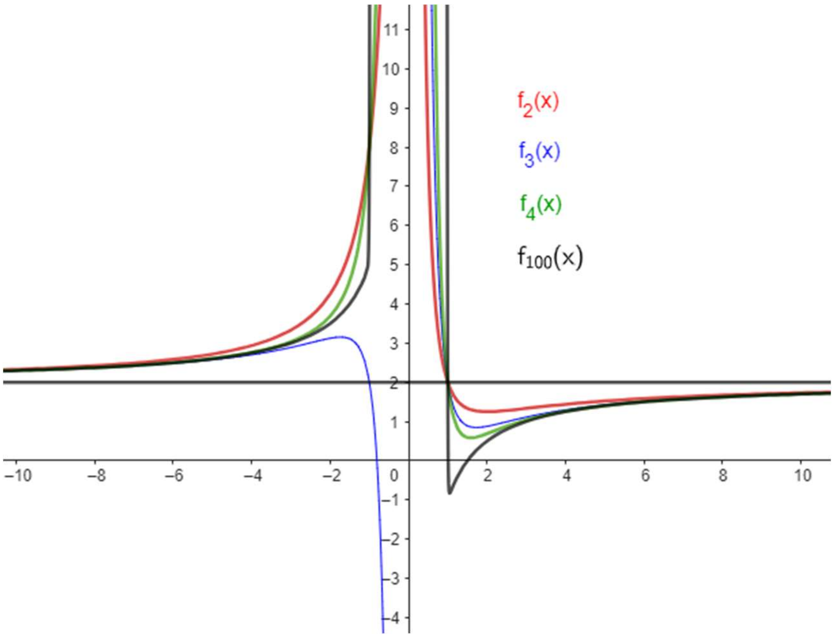
$$\lim_{x\to 0^{\mp}} f_n(x) = \lim_{x\to 0^{\mp}}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}\right) = \lim_{x\to 0^{\mp}}\left(\frac{3}{x^n}\right) = \mp\infty$$

La retta x = 0 è in entrambi i casi asintoto verticale, con il differente andamento della funzione definito dai due limiti.

A $\pm\infty$ si ha invece:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}\right) = 2^{\pm}$$

La retta y = 2 è asintoto orizzontale.



b)

$$f_3(x) = 2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^3}$$

Utilizziamo i risultati della discussione precedente

$f_3\,'(x) = \frac{3}{x^2}-\frac{9}{x^4}$: massimo locale in $\left(-\sqrt{3},\, 2+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, minimo locale in $\left(\sqrt{3},\, 2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.

la funzione è decrescente nell'intervallo $\left]-\sqrt{3},\, 0\right[$ e diverge a -∞ per x→0$^-$, per cui ammette una sola radice di ascissa negativa

$f_3\,''(x) = \frac{-6}{x^3}+\frac{36}{x^5}$ flessi in $x = \mp\sqrt{6}$

Discutiamo graficamente l'equazione $f_3(x) = k$, intersecando il grafico della funzione con il fascio di rette di equazione y =k:

$$f_3(x) = k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = f_3(x) \\ y = k \end{cases}$$

Dal grafico segue immediatamente che l'equazione ha il seguente numero di soluzioni:

per $k < 2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$: 1 soluzione

per $2-\frac{2}{3}\sqrt{3} \le k < 2$: 3 soluzioni, di cui 2 coincidenti per $k = 2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

per $k = 2$: nessuna soluzione

per $2 < k \le 2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$: 3 soluzioni, di cui 2 coincidenti per $k = 2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$

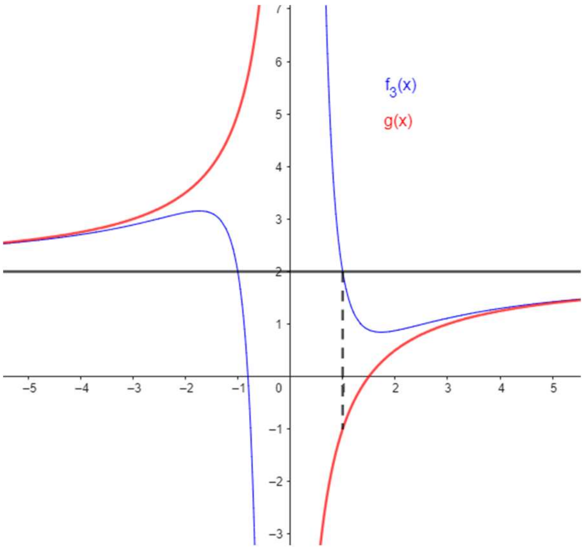
per $k > 2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$: 1 soluzione

c)

$$f_n(x) > g(x) \quad \Rightarrow \quad 2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^3} > 2-\frac{3}{x}$$

ovvero $\frac{3}{x^3} > 0$, vera $\forall x > 0$

Riportiamo nello stesso grafico le due funzioni. Evidenziamo che per *x*=1, $f_3(1) = 2$



$$I(t) = \int_1^t \frac{3}{x^n}\,dx = \left|\frac{3x^{-n+1}}{-n+1}\right|_1^t = \frac{3}{n-1}\left(1-\frac{1}{t^{n-1}}\right)$$

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{3}{n-1}\left(1-\frac{1}{t^{n-1}}\right) = \frac{3}{n-1}$$

Il risultato rappresenta l'area della regione non limitata di piano, compresa tra le due curve, a destra della retta di equazione *x* = 1.

d)

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f_n\left(x\right)-2}{g\left(x\right)-2}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^n}}{-\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{-1+\frac{1}{x^{n-1}}}{-1}=1$$

Problema 2

a)

$f_a(x)=\frac{1}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)$, definita $\forall x\in\mathbb{R}$

Questa funzione funzione è nota anche come $f_a(x)=\sinh(ax)$ (seno iperbolico)

Osserviamo che:

$f_a(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{-ax}-e^{ax}\right)=-\frac{1}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)=-f_a(x)$, quindi la funzione è dispari

$\lim_{x\to\mp\infty} f_a(x)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)=\mp\infty$

$f_a'(x)=\frac{a}{2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, funzione monotona crescente

$f_a''(x)=\frac{a^2}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)=\frac{a^2}{2e^{ax}}\left(e^{2ax}-1\right)>0$, risolta per $\forall x>0$. La funzione presenta un flesso nell'origine.

$g_a(x)=\frac{1}{2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)$, definita $\forall x\in\mathbb{R}$

Funzione nota anche come $g_a(x)=\cosh(ax)$ (coseno iperbolico)

$g_a(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{-ax}+e^{ax}\right)=g_a(x)$, quindi la funzione è pari

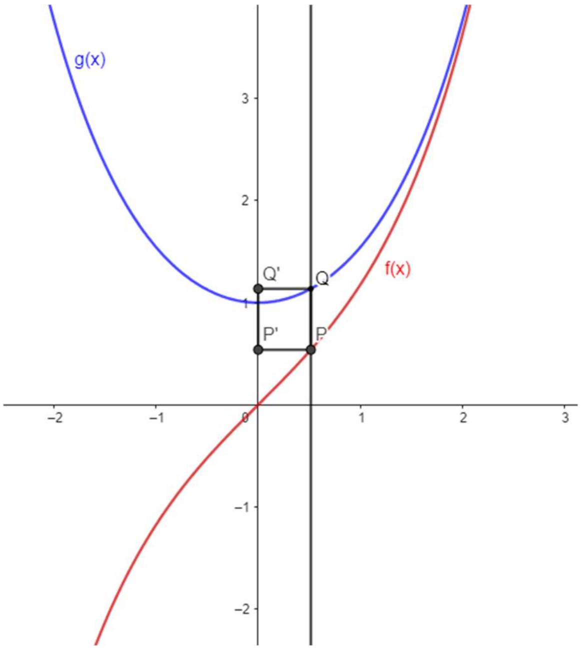
$\lim_{x\to\mp\infty} g_a(x)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)=+\infty$

$g_a'(x)=\frac{a}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)>0 \quad \forall x>0$: la funzione presenta un minimo assoluto nel punto (0, 1).

$g_a''(x)=\frac{a^2}{2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$; la funzione non presenta flessi.

Riportiamo i due grafici, scegliendo *a* = 1

b)



Sia *x* l'ascissa dei punti P e Q; la lunghezza del segmento QP è

$$QP=\frac{1}{2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)=e^{-ax}$$

l'area del rettangolo PQQ'P' è

$$S(x)=xe^{-ax}$$

Deriviamo questa funzione e studiamone il segno per determinare l'area massima:

$$S'(x)=e^{-ax}(1-ax)>0 \text{ per } x<\frac{1}{a}$$

L'area è massima per $x=\frac{1}{a}$ e assume valore:

$$S_{\max}=\frac{1}{a}e^{-1}$$

Infine

$$S_{\max}=\frac{1}{a}e^{-1}=e^{-1} \quad \Rightarrow \quad a=1$$

c)

$$g^2(x)-f^2(x)=\frac{1}{4}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)^2-\frac{1}{4}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2ax}+2+e^{-2ax}\right)-\frac{1}{4}\left(e^{2ax}-2+e^{-2ax}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Uguaglianza usualmente espressa nella forma

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

$$g(x)-f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=e^{-x}$$

Imponiamo le disuguaglianze

$$50\le e^{-x}\le 100$$

Ovvero

$$-\ln 100\le x\le -\ln 50 \quad\Rightarrow\quad -4,6\le x\le -3,9$$

L'unico intero compreso in questo intervallo è *n* = -4.

f(x) è monotona in $\mathbb{R}$, quindi è invertibile; scriviamo la funzione nella forma:

$$y=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \quad\Rightarrow\quad e^{x}-e^{-x}-2y=0$$

che possiamo ulteriormente semplificare in

$$e^{2x}-2ye^{x}-1=0$$

che ha la forma di un'equazione di secondo grado nella variabile e^{x}, con soluzione

$$e^{x}=y\mp\sqrt{y^{2}+1}$$

$e^{x}>0$, pertanto è accettabile solo la soluzione $e^{x}=y+\sqrt{y^{2}+1}$.

Risolviamo per *x:*

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)$$

La funzione inversa si ottiene infine scambiando le variabili *x* e *y*:

$$f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

d)

La parabola ha equazione del tipo:

$$y=ax^{2}+1$$

Si deve poi avere:

$$y'(1)=2a=-2 \quad\Rightarrow\quad a=-1$$

L'equazione della parabola è quindi:

$$y=-x^{2}+1$$

Utilizzando la simmetria delle due funzioni implicate, l'area della parte di piano richiesta misura:

$$A=2\int_{0}^{1}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}+x^{2}-1\right)dx=2\left|\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-x\right|_{0}^{1}=2\left(\frac{e-e^{-1}}{2}+\frac{1}{3}-1\right)=e-\frac{1}{e}-\frac{4}{3}\approx 1,01$$

Il triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico ha base 2 e altezza 1, quindi la sua area è

$$A_{triangolo} = 1 \approx A$$

Le due aree differiscono di circa l'1%.

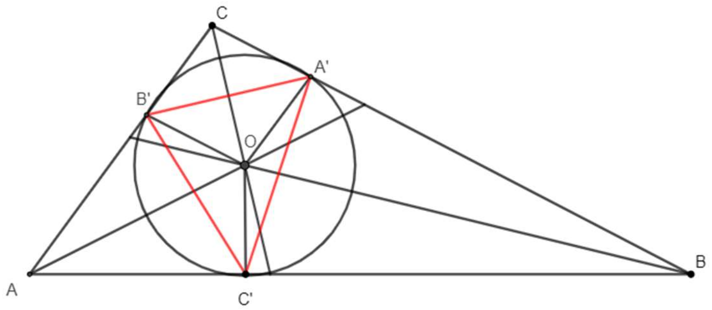
QUESITI

1

Calcoliamo gli angoli del triangolo ABC; indicata con *x* l'ampiezza dell'angolo A, si ha:

$$x+2x+\frac{x}{3}=180° \quad \Rightarrow \quad \frac{10x}{3}=180° \quad \Rightarrow \quad x=54°$$

Gli altri angoli hanno ampiezza C=108° e B =18°



Il centro della circonferenza inscritta è il punto di intersezioni delle bisettrici degli angoli interni del triangolo ABC, i raggi nei punti di tangenza sono perpendicolari ai rispettivi lati.

Consideriamo il quadrilatero AOC'B; gli angoli in A' e C' sono retti, pertanto gli angoli in B e O sono supplementari: ne segue:

A'OC'=180°-18°=162°

L'angolo A'B'C' è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco minore A'C', quindi è la metà dell'angolo A'OC':

A'B'C' = 81°

Ragionando in modo analogo sugli altri angoli, si ottiene:

B'A'C'=63°, B'C'A'=36°

2

Calcoliamo il numero totale di gruppi che si possono formare:

Possiamo formare il primo gruppo scegliendo 5 studenti tra i 18 della classe, il secondo scegliendone 6 dai restanti 13, il terzo si forma con gli ultimi 7 studenti:

$$N_{tot}=\binom{18}{5}\binom{13}{6}\binom{7}{7}=14\,702\,688\,.$$

Il terzo fattore è uguale a 1; lo lasciamo per rendere più chiaro il conteggio della composizione; il numero di gruppi non dipende ovviamente dall'ordine in cui si sceglie di comporli.

Calcoliamo il numero di gruppi cui appartengono contemporaneamente le tre ragazze:
se appartengono al primo gruppo, questo sarà composto dalle tre ragazze, cui si aggiungono altri 2 studenti scelti tra gli altri 15 gli altri due gruppi si formano senza limitazioni, come nel caso precedente; in modo analogo, se le tre ragazze appartengono al secondo gruppo, questo si completerà aggiungendo altri 3

ragazze tra i 15 restanti, mentre se appartengono al terzo gruppo, si dovranno scegliere 4 studenti tra i 15 restanti. Le tre scelte sono ovviamente incompatibili, per cui il numero totale di gruppi che possono essere formati, lasciando insieme le tre ragazze, sono quindi:

$$N_3 = \binom{15}{2}\binom{13}{6}\binom{7}{7} + \binom{15}{3}\binom{12}{5}\binom{7}{7} + \binom{15}{4}\binom{11}{5}\binom{6}{6} = 1171170$$

Calcoliamo il numero di gruppi a ciascuno dei quali appartenga una sola delle tre ragazze.

Posta una di esse in ciascuno dei tre gruppi (es. A nel primo, B nel secondo, C nel terzo), dovremo completare ognuno di essi con gli altri 15 studenti sui quali non ci sono condizioni particolari; ciascuna delle tre ragazze però può appartenere a uno qualunque dei tre gruppi, per cui è necessario considerare la permutazione di 3 elementi, ovvero moltiplicare per 3!

$$N_1 = 3!\binom{15}{4}\binom{11}{5}\binom{6}{6} = 3\,783\,780$$

La probabilità che solo 2 di loro facciano parte dello stesso gruppo è pertanto:

$$p = 1 - \frac{N_1 + N_3}{N_{tot}} = 0,662$$

3

Il piano π ha equazione generale:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Imponiamo l'appartenenza della retta *r*, sostituendo le equazioni parametriche di *r* nell'equazione cartesiana di π:

$$a(1+t) + bt + c(1+4t) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad t(a+b+4c) + a + c + d = 0$$

Questa equazione deve risultare identicamente vera, ovvero devono annullarsi simultaneamente il coefficiente di *t* e il termine noto:

$$a + b + 4c = 0; \quad a + c + d = 0$$

La retta *s* può esprimersi nella forma parametrica seguente:

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

Il vettore normale al piano, di componenti (a, b, c) è perpendicolare alla retta *s*, il cui vettore direzione ha componenti (0, 1, 2), pertanto il prodotto scalare dei due vettori è nullo:

$$c + 2d = 0$$

Imponendo entrambe le condizioni si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a+b+4c=0 \\ a+c+d=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$$

La soluzione è immediata

$$\begin{cases} b=-2c \\ a=-2c \\ d=c \end{cases}$$

Per il piano π si ottiene l'equazione

$$-2cx-2by+cz+c=0$$

che, essendo $c \neq 0$, si riduce a

$$2x+2y-z-1=0$$

4

Indichiamo con *x* il lato di base, con *y* l'altezza del parallelepipedo

Il volume è $V=x^2y$, con $x,y>0$

con la condizione

$$2x^2+y^2=d^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{1}{2}\left(d^2-y^2\right)$$

Sostituiamo quest'ultima espressione nell'equazione del volume, e deriviamola rispetto a *y* per ottenere il volume massimo:

$$V=\frac{1}{2}\left(d^2-y^2\right)y=\frac{1}{2}\left(d^2y-y^3\right)$$

$$V'=\frac{1}{2}\left(d^2-3y^2\right)$$

$V'>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(d^2-3y^2\right)>0$ risolta per $0<y<\frac{d}{\sqrt{3}}$

Il volume è massimo per $y=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $x=\sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2-y^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(d^2-\frac{d^2}{3}\right)}=\frac{d}{\sqrt{3}}$

Il parallelepipedo è pertanto un cubo.

5

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee x=\pm\frac{5}{6}$$

La funzione richiesta è dispari, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'origine, per cui i due flessi nei punti di ascissa $x=\pm\frac{5}{6}$ hanno tangenti parallele. Poiché la funzione richiesta deve avere un solo flesso a tangente orizzontale, questo è necessariamente il flesso nell'origine, pertanto la derivata prima della funzione deve annullarsi in *x* = 0:

$$f'(0)=0$$

Integriamo due volte la funzione *f''(*x) per ottenere la funzione *f* richiesta:

$$f'(x)=-\frac{5}{2}x^4+6x^2+c$$

La condizione $f'(0)=0$ impone $c=0$

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^5+2x^3+d$$

La funzione richiesta è dispari, pertanto *d = 0*; la funzione *f*(x) è infine:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^5+2x^3$$

6

La funzione determina l'area (con segno) della parte di piano compresa tra la curva e l'asse *x*, dal punto id ascissa -2 al generico punto di ascissa *x*.

$$F(-2)=\int_{-2}^{-2} f(t)dt=0$$

$F(2)$ individua l'area della semicirconferenza di raggio 2:

$$F(2)=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=2\pi$$

$$F(3)=F(2)-\frac{1}{2}=2\pi-\frac{1}{2}$$

$$F(5)=F(3)=2\pi-\frac{1}{2}$$

7

$$f(x)=\frac{x|x+1|}{x^3-x}=\frac{x|x+1|}{x(x-1)(x+1)}=\frac{|x+1|}{(x-1)(x+1)}$$ definita in $]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$

Discontinuità in $x=0,\pm 1$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x+1|}{(x-1)(x+1)} = -1$$: discontinuità di terza specie (eliminabile)

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-1}{(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x-1)} = -\frac{1}{2}$$: discontinuità di prima specie

$$\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \lim_{x\to 1^\mp} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^\mp} \frac{1}{x-1} = \mp\infty$$: discontinuità di seconda specie

8

$A \Rightarrow B$ è un teorema

$B \Rightarrow A$: falsa.

Controesempio $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$; la funzione è continua ma non derivabile

$A \Leftrightarrow B$: falsa, in quanto $A \Leftrightarrow B$ equivale a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, e la seconda proposizione è falsa; è sufficiente lo stesso controesempio del punto precedente.