Esame di Stato 2023 – Matematica

Problema 1

1

a)

La parabola ha vertice nel punto di coordinate (-2; 0), soddisfatto da tutte le curve assegnate, e passa per il punto di coordinate (0; 1). Imponendo questa condizione si ottiene:

$$1 = 4a \quad \text{da cui} \quad a = \frac{1}{4}$$

La circonferenza ha centro nell'origine e raggio 1, per cui ha equazione:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ da cui } b = -1$$

L'iperbole ha vertice in (1; 0), per cui si ottiene:

$$1 + c = 0 \quad \text{da cui} \quad c = -1$$

La funzione *f* assume pertanto la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & -2 \le x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Poiché le caratteristiche delle curve che compongono i tre tratti della funzione *f* sono note, possiamo determinarne immediatamente la derivabilità: la funzione f è derivabile in $]-2;0[\cup]0;1[\cup]1;2[$ con derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & -2 < x < 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

In particolare:

- nel punto di ascissa -2 la funzione è derivabile a destra, con semitangente $y = 0$ (asse x);
- Il punto di ascissa 0 è un punto angoloso, infatti:

  $$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}(x+2) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

  Le due semitangenti sinistra e destra hanno equazione rispettivamente

$y = x + 1$ e $y = 1$

- Il punto di ascissa 1 è un punto di cuspide, con semitangente verticale di equazione v

- nel punto di ascissa 2 la funzione è derivabile a sinistra; la curva passa per il punto di coordinate $\left(2; \sqrt{3}\right)$ e ha pendenza:

  $$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

  La semitangente ha equazione:

  $$y - \sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x - 2\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

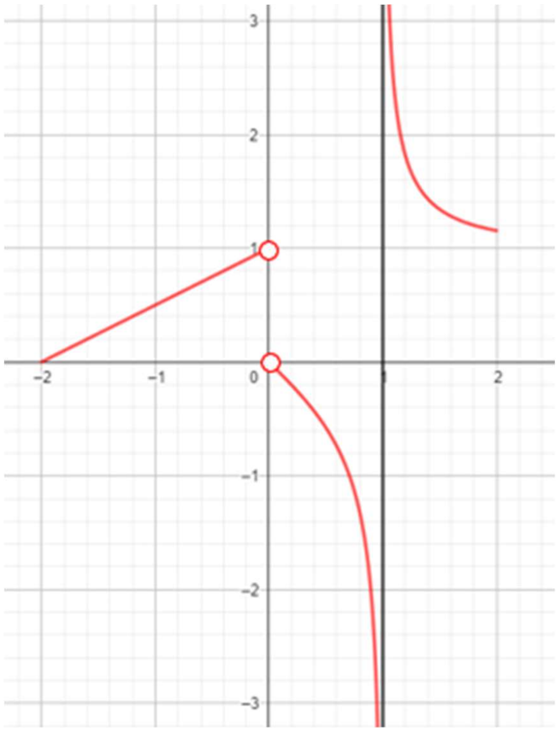
b)

Il testo richiede una descrizione qualitativa del grafico di *f'(x)*, dedotto dall'andamento noto del grafico di *f*, pertanto possiamo concludere che:

- nell'intervallo]-2; 0[, dove *f* è crescente, *f'* ha segno positivo, e andamento lineare;

- nell'intervallo]0; 1[*f* è decrescente, per cui *f'* è negativa e ha un asintoto verticale destro di equazione $x = 1$;

- nell'intervallo]1; 2[, *f* è crescente, *f'* ha segno positivo, e ha un asintoto verticale sinistro di equazione $x = 1$. Il grafico di f' è il seguente:



Dobbiamo studiare il segno di F''(x); si ha:

$$F''(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_{-2}^{x} f(t)\,dt\right)=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$$

La funzione *F(x)* è convessa quando $F''(x)>0$, ovvero per $x\in\,]-2;0[\,\cup\,]1;2[$, è concava per $F''(x)<0$, ovvero per $x\in\,]0;1[$

c)

La funzione

$y=\frac{1}{4}(x+2)^2$ è monotona nell'intervallo $[-2;0]$, condizione sufficiente a garantirne la biunivocità, quindi l'invertibilità.

Esplicitando *x* si ottiene:

$$x+2=2\sqrt{y} \quad\Rightarrow\quad x=2\sqrt{y}-2$$

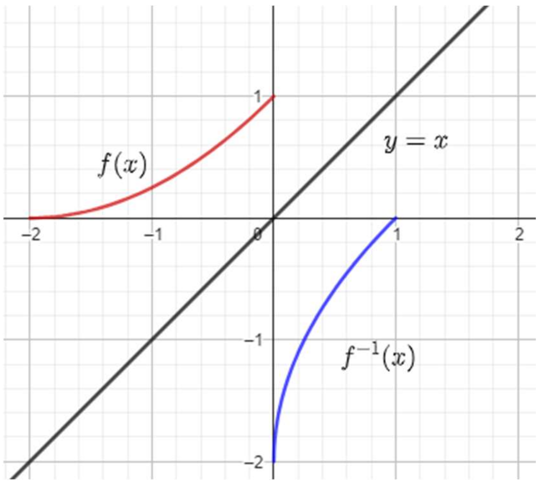
la scelta del segno davanti alla radice è motivata dal fatto che, nell'intervallo considerato, $x+2\geq 0$; la funzione inversa si ottiene infine con il cambio di variabili

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$$

che determina la simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante; si ottiene, dopo aver eliminato gli apici, la funzione di equazione:

$h=f^{-1}(x): y=2\sqrt{x}-2$ definita nell'intervallo: $[0;1]\rightarrow[-2;0]$

Utilizzando la simmetria otteniamo immediatamente il grafico della funzione inversa (in blu):



La funzione non è derivabile nei punti corrispondenti a quelli in cui in cui *f(x)* ha derivata nulla, pertanto *h(x)* è derivabile nell'intervallo $]0;1[$; nel punto *x* = 1 *h* ammette derivata sinistra.

d)

La condizione richiesta comporta:

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2\,dx = \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2\,dx$$

Semplifichiamo il fattore comune ¼ e svolgiamo gli integrali ottenendo:

$$\left|\frac{(x+2)^3}{3}\right|_{-2}^{k} = \left|\frac{(x+2)^3}{3}\right|_{k}^{0}$$ che comporta:

$$(k+2)^3 = 8-(k+2)^3 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{4}-2 \approx 0{,}413$$

Problema 2

a)

La funzione esiste per $x^2 - a \neq 0$, pertanto il suo dominio è dato da:

- $x \in \mathbb{R}$ se $a < 0$
- $x \in \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\sqrt{a} \right\}$ se $a > 0$

Pertanto, se $a < 0$ la funzione non ammette discontinuità,

se $a > 0$ dobbiamo calcolare i limiti

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{a}} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

Il numeratore tende al valore $a \mp a\sqrt{a} = a\left(1 \mp \sqrt{a}\right)$ che assume valore nullo per $a = 1$, che dovremo quindi valutare a parte.

Per $\left(a > 0\right) \wedge \left(a \neq 1\right)$ si ha:

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{a}} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \infty$$

Ai fini della richiesta non è necessario precisarne il segno; la funzione ammette discontinuità di seconda specie nei punti $x = \mp\sqrt{a}$, con asintoti verticali di equazione $x = \mp\sqrt{a}$

Per $a = 1$ si ha:

$$f_1\left(x\right) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{x}{x+1} \quad \text{con } x \neq 1$$

La funzione presenta discontinuità di seconda specie in $x = -1$, con asintoto verticale di equazione $x = -1$ e una discontinuità di terza specie (eliminabile) in $x = 1$.

Per ogni valore di $a \neq 0$ si ha infine:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{a}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)} = 1$$

per cui tutte le curve ammettono asintoto orizzontale di equazione $y = 1$

b)

Determiniamo il punto di intersezione tra la curva e il suo asintoto orizzontale:

$$f_a\left(x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = 1 \quad \Rightarrow \quad a\left(1 - x\right) = 0$$

Poiché $a \neq 0$ l'equazione ammette l'unica soluzione $x = 1$.

Notiamo che $f_1(x)$ non è definita per $x=1$, coerentemente con le indicazioni del testo.

Tutte le curve passano pe l'origine; per determinarne la retta tangente calcoliamo la derivata $f_a'(0)$.

Si ha preliminarmente:

$$f_a'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-ax}{x^2-a}\right)=\frac{(2x-a)(x^2-a)-2x(x^2-ax)}{(x^2-a)^2}=\frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}$$

Da cui:

$$f_a'(0)=1$$

Tutte i grafici Ω_a hanno come tangente nell'origine la bisettrice del primo e terzo quadrante, $y=x$.

Notiamo che per $a=1$ si ha anche:

$$f_1'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

Da cui:

$$f_1'(0)=1$$

per cui anche questa curva particolare è tangente alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

b)

Calcoliamo i punti in cui $f_a'(x)$ si annulla, ponendo $\frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}=0$, ovvero

$$a(x^2-2x+a)=0$$

che ha come radici:

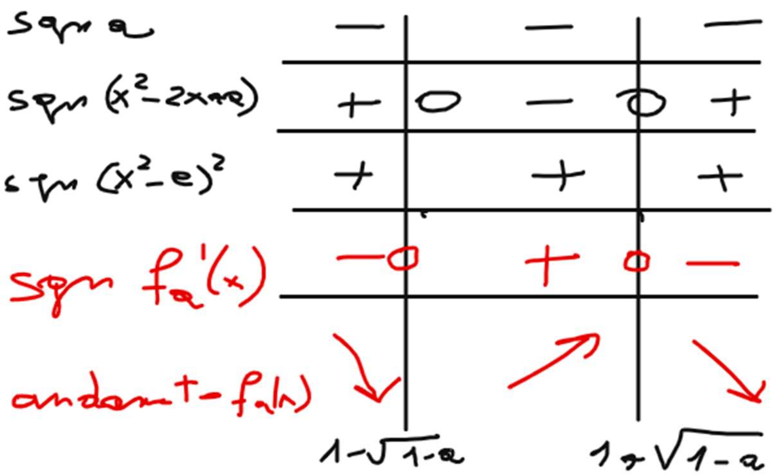
$x_1=1-\sqrt{1-a}$ e $x_2=1+\sqrt{1-a}$ tali soluzioni sono reali per $a\le 1$.

Considerando le condizioni richieste, distinguiamo i casi $a<0$ e $0<a<1$.

Per $a<0$ $f_a(x)$ non ha punti di discontinuità e si ha:

$$f_a'(x)=\frac{a(x^2-2x+a)}{(x^2-a)^2}=\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2-a)^2}$$

SI ha pertanto la seguente situazione



$f_a(x)$ è monotona decrescente per $x \in \left]-\infty; 1-\sqrt{1-a}\right[\cup \left]1+\sqrt{1-a}; +\infty\right[$,

monotona crescente per $x \in \left]1-\sqrt{1-a}; 1+\sqrt{1-a}\right[$

Per $0 < a < 1$ $f_a(x)$ ha due punti di discontinuità $x = \pm\sqrt{a}$ di cui dobbiamo verificare la posizione rispetto ai punti stazionari; questi ultimi hanno ascissa positiva, per cui basterà confrontarli con il solo punto di discontinuità $x = +\sqrt{a}$.

Verifichiamo se:

$$\sqrt{a} > 1-\sqrt{1-a}$$

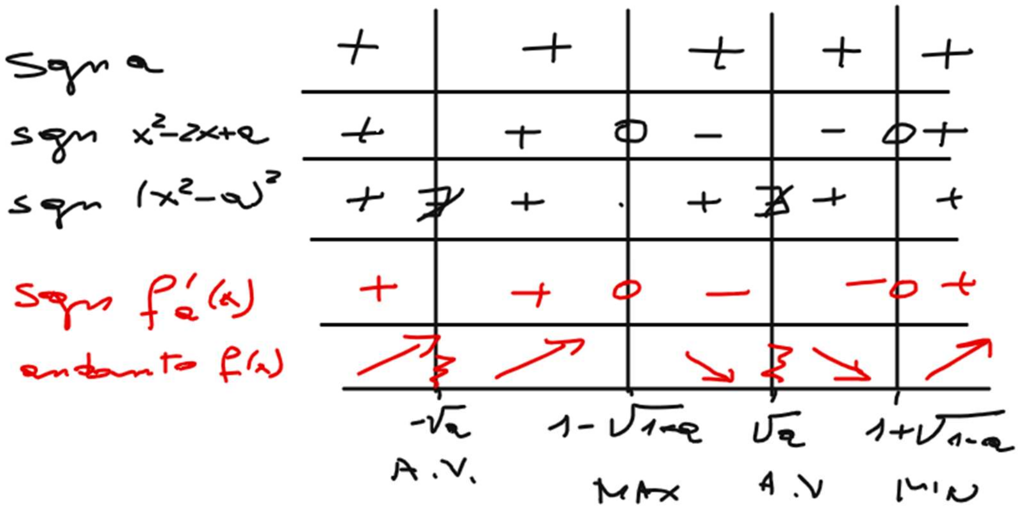
Poiché entrambi i membri sono positivi possiamo elevare al quadrato (stessa condizione anche nei passaggi successivi):

$$a > 1+1-a-2\sqrt{1-a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-a} > 1-a \quad \Rightarrow \quad 1 > \sqrt{1-a} \quad \Rightarrow \quad a > 0$$

Il secondo punto stazionario ha ascissa $1+\sqrt{1-a} > 1$, pertanto nell'intervallo $0 < a < 1$ vale la disuguaglianza

$$1-\sqrt{1-a} < \sqrt{a} < 1+\sqrt{1-a}$$

Lo studio del segno di $f_a'(x)$ determina quindi la seguente situazione:



$f_a(x)$ è monotona crescente per $x \in \left]-\infty;-\sqrt{a}\right[\cup \left]-\sqrt{a};1-\sqrt{1-a}\right[\cup \left]1+\sqrt{1-a};+\infty\right[$,

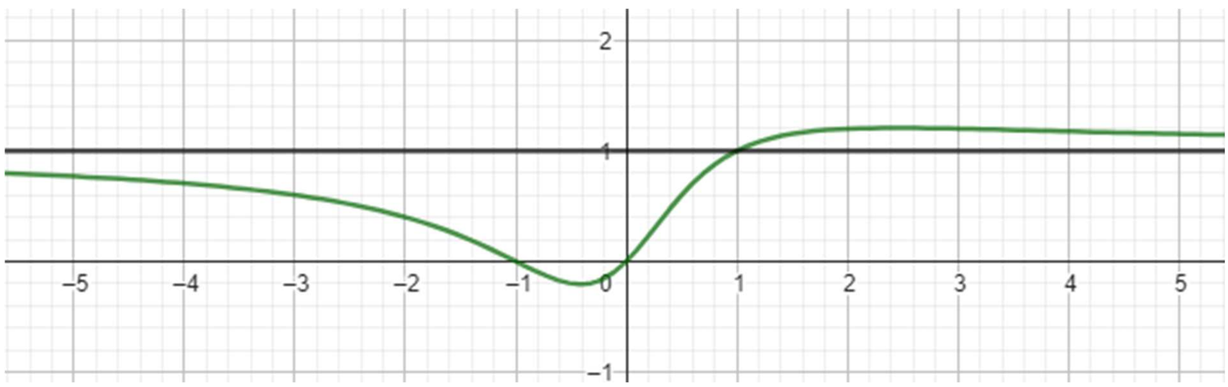
monotona decrescente per $x \in \left]1-\sqrt{1-a};\sqrt{a}\right[\cup \left]\sqrt{a};1+\sqrt{1-a}\right[$

Consideriamo infine il caso particolare $a=-1$

$$f_{-1}(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$$

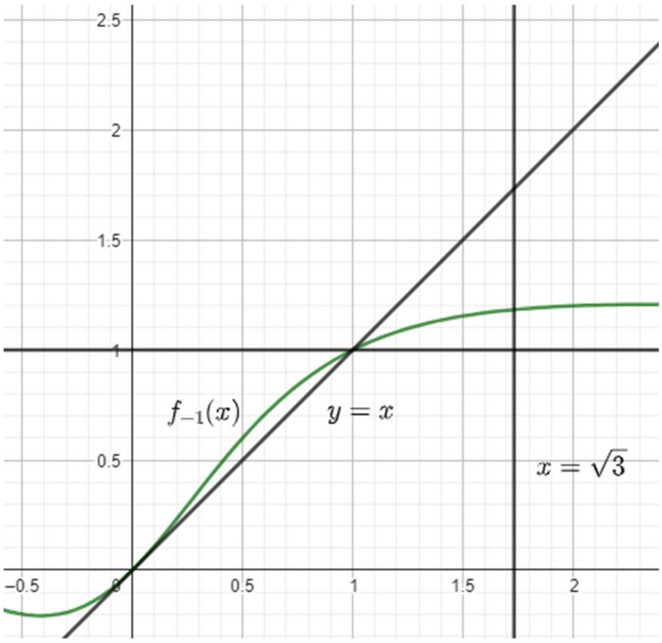
La funzione è definita per $x \in \mathbb{R}$, ammette minimo relativo in $\left(1-\sqrt{2};\frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \approx -0,21\right)$, massimo relativo in $\left(1+\sqrt{2};\frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \approx 1,21\right)$.

Utilizzando le informazioni già trovate si ha infine il seguente grafico:



d)

Ingrandiamo la parte del grafico rilevante ai fini della domanda:



L'area richiesta è data dall'integrale:

$$S=\int_0^1\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}-x\right)dx+\int_1^{\sqrt{3}}\left(x-\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)dx$$

Che possiamo riscrivere nella forma:

$$S=\int_0^1\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}-x\right)dx-\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}-x\right)dx$$

Calcoliamo la primitiva delle due funzioni integrande:

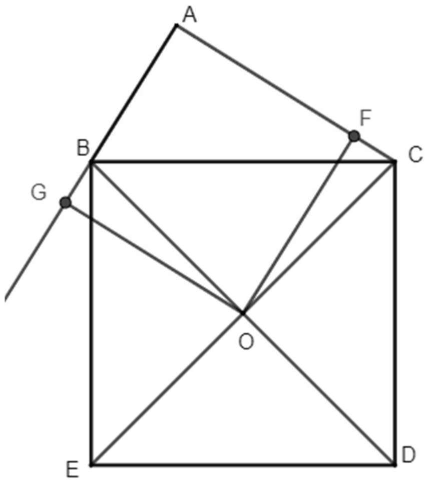
$$\int\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}-x\right)dx=\int\left(\frac{x^2+1-1+x}{x^2+1}-x\right)dx=\int\left(1-x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan x+c$$

Per cui si ha:

$$S=\left|x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan x\right|_0^1-\left|x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\arctan x\right|_1^{\sqrt{3}}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\approx 0,244$$

QUESITI

1



Indicati con F e G i piedi delle perpendicolari condotte da O rispettivamente ai lati AB e AC, con β e γ gli angoli acuti $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, consideriamo i triangoli OGB e OFC.

- sono rettangoli rispettivamente in G e F;
- hanno le ipotenuse BO e OC congruenti, perché metà delle diagonali del quadrato BCDE;
- poiché le diagonali del quadrato ne bisecano gli angoli, BOC è un triangolo rettangolo isoscele, per cui $O\hat{B}C = O\hat{C}B = 45°$, pertanto
  $O\hat{C}F = 45° + \gamma$ e
  $O\hat{B}G = 180° - (45° + \beta) = 135° - \beta$
  $\beta = 90° - \gamma$, perché angoli acuti del triangolo rettangolo ABC, per cui si ha infine:
  $O\hat{B}G = 135° - \beta = 135° - (90° - \gamma) = 45° + \gamma = O\hat{C}F$
  I triangoli OGB e OFC sono congruenti per il secondo criterio generalizzato di congruenza, in particolare:
  $OG = OF$

2

Calcoliamo la probabilità associata a ogni faccia: indicata con *p* la probabilità di uscita di una faccia dispari, si ha:

$$3p + 3(2p) = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{9}$$

La probabilità di uscita di una faccia pari è pertanto: $p' = \frac{2}{9}$

- i numeri primi presenti sulle facce di un dado sono 2, 3 e 5 (attenzione, 1 non è un numero primo!).

$$P(E = 2 \vee E = 3 \vee E = 5) = p' + 2p = \frac{4}{9}$$

- Le possibili uscite sono 3, 4, 5, 6, pertanto:

$$P\left(E \geq 3\right) = 2p' + 2p = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

- Le possibili uscite sono 1, 2, 3, pertanto:

$$P\left(E \leq 3\right) = p' + 2p = \frac{4}{9}$$

3

Rispetto all'origine O(0, 0,0) retta *r* ha equazione

$$r:\left(x,y,z\right) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\,t = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)t = \left(1,-2,0\right) + \left(1,5,-1\right)t$$

che, in forma parametrica, diviene:

$$\left(x,y,z\right) = \left(1+t,-2+5t,-t\right)$$

Per imporre la condizione di tangenza, imponiamo che il vettore $\overrightarrow{CP}$ sia ortogonale al vettore $\overrightarrow{AB}$; ciò comporta che il prodotto scalare tra i due vettori si annulli: $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Si ha pertanto:

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \left[\left(1+t,-2+5t,-t\right) - \left(1,-6,7\right)\right] \cdot \left(1,5,-1\right) = \left(t,4+5t,-7-t\right) \cdot \left(1,5,-1\right) =$$

$$= \left(t,4+5t,-7-t\right) \cdot \left(1,5,-1\right) = t + 20 + 25t + 7 + t = 27 + 27t = 0$$

risolta da $t = -1$.

Il punto di tangenza *P* ha pertanto coordinate:

$$P\left(0,-7,1\right)$$

Il raggio della circonferenza, CP, misura:

$$CP = \sqrt{\left(0-1\right)^2 + \left(-7+6\right)^2 + \left(1-7\right)^2} = \sqrt{38}$$

L'equazione della circonferenza è infine:

$$\left(x-1\right)^2 + \left(y+6\right)^2 + \left(z-7\right)^2 = 38$$

4

Indichiamo con *a* e *h* rispettivamente il lato di base e l'altezza del parallelepipedo.

Dobbiamo minimizzare l'area totale,

$S = 2a^2 + 4ah$ con la condizione $V = a^2 h$

Esprimendo l'altezza in funzione del lato di base: $h = \frac{V}{a^2}$, l'area risulta:

$$S = 2a^2 + 4\frac{V}{a}$$

La cui derivata:

$$S' = 4a - 4\frac{V}{a^2} = 4\frac{a^3 - V}{a^2}$$

si annulla per $a = \sqrt[3]{V}$ ed è positiva per $a > \sqrt[3]{V}$.

Il parallelepipedo di area minima è pertanto il cubo.

La diagonale del parallelepipedo misura

$$D = \sqrt{2a^2 + h^2}$$

Per semplicità di calcolo, possiamo minimizzarne il quadrato; imponendo il vincolo sul volume si ha:

$$D^2 = 2a^2 + h^2 = 2a^2 + \frac{V^2}{a^4}$$

La cui derivata prima:

$$\left(D^2\right)' = 4a - 4\frac{V^2}{a^5} = 4\frac{a^6 - V^2}{a^5}$$

si annulla per $a = \sqrt[6]{V^2} = \sqrt[3]{V}$ (punto di minimo, analogamente al caso precedente)

per cui si ottiene ancora il cubo.

5

Il punto di tangenza ha coordinate (3, 4).

Calcoliamo la derivata della funzione nel punto 3:

$$y'(3) = \left.\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{3}{4}$$

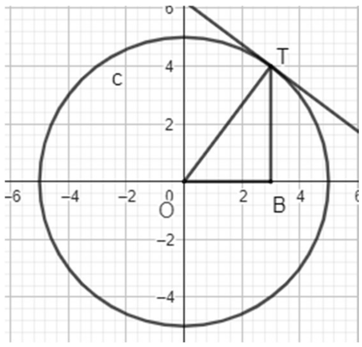
La retta tangente ha equazione:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

La curva considerata può scriversi nella forma:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si tratta quindi della semicirconferenza di centro l’origine e raggio 5.



Il raggio OT in figura appartiene a una retta di pendenza

$$m = \tan\left(B\hat{O}T\right) = \frac{4}{3}$$

La retta tangente in T è perpendicolare al raggio, per cui ha pendenza

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{4}$$

La conclusione come nel caso precedente.

6

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \left(ax^3 + bx\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2}$$

Affinché il limite sia finito, è necessario che anche il numeratore tenda a 0, pertanto si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x - 3ax^2 - b\right) = 1 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

Derivando una seconda volta, o applicando il limite notevole, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \frac{-1-6a}{6}$$

Imponiamo infine che il limite valga 1:

$$\frac{-1-6a}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{7}{6}$$

7

Imponiamo che *f(x)* sia continua in 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-1 + \arctan x\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(ax + b\right) \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

Imponiamo che le derivate sinistra e destra coicidano:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0^+} a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

La funzione assume la forma:

$$f(x)=\begin{cases}-1+\arctan x & x<0\\ x-1 & x\geq 0\end{cases}$$

ed è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, con

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

Poiché $f'(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, la funzione è monotona crescente, quindi non esiste alcun intervallo in cui sia applicabile il teorema di Rolle.

8

Osserviamo preliminarmente che

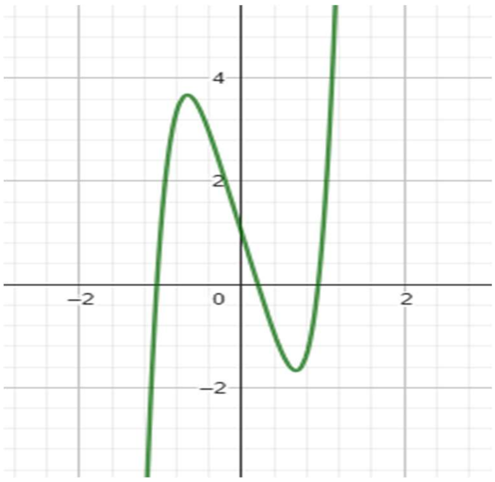
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^5-5ax+a\right)=\pm\infty,$$

quindi, per il teorema di esistenza degli zeri, la funzione si annulla almeno una volta.

Determiniamo i punti stazionari della funzione:

$$f_a'(x)=5x^4-5a=5\left(x^4-a\right)$$

che si annulla per $x=\pm\sqrt[4]{a}$, il cui grafico ha andamento del tipo del tipo



i punti di massimo e minimo relativo hanno coordinate:

$\left(-\sqrt[4]{a},1+4\sqrt[4]{a}\right)$ e $\left(\sqrt[4]{a},1-4\sqrt[4]{a}\right)$; il punto di massimo ha ordinata positiva, perché esistano tre zeri è necessario che il minimo abbia ordinata negativa:

$$1-4\sqrt[4]{a}<0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt[4]{a}>\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad a>\frac{1}{256}$$